OPTIMALIZÁLÁS LAGRANGE-FÉLE MULTIPLIKÁTOR SEGÍTSÉGÉVEL

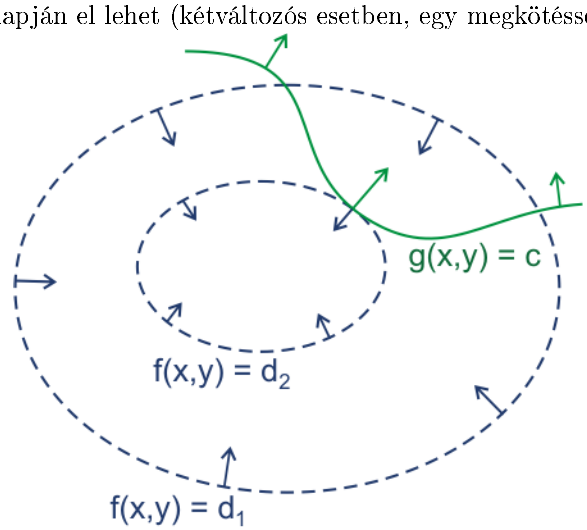
HAJDER LEVENTE

1. Bevezetés

A Lagrange-féle multiplikátoros eljárást Joseph Louis Lagrange (1736-1813) olasz csillagász-matematikus (eredeti nevén Giuseppe Lodovico Lagrangia) fejlesztette ki a XVIII. század végén. Lagrange univerzális megoldást adott feltételes szélsöérték-keresési problémákra.

2. A probléma

Adott egy vektor-skalár költségfüggvény $f(x)$ (ahol $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ N dimenziós vektor), amelynek $g_1(x) = c_1$,...,$g_D(x) = c_D$ megkötések (összesen D darab megkötés) mellett szeretnénk a szélsöértékét megtalálni. Mindezt az alábbi ábra alapján el lehet (kétváltozós esetben, egy megkötéssel) képzelni:



A (kékkel rajzolt) szaggatott vonal mutatja a költségfüggvény szintvonalait, a folyamatos (zöld) vonal pedig a megkötést. A feladat a zöld vonal mentén a költségfüggvény maximumának (vagy minimumának) meghatározása.

3. Megoldás

Az ábrán jól látszik, és be is lehet könnyen látni, hogy abban az esetben, amikor szélsöérték van a $g_1(x) = c_1$,...,$g_D(x) = c_D$ felületek mentén, akkor a $g(x)$ függvény normálvektora egyben az $f(x)$ felület normálvektora is,. Ezt matematikailag úgy

Date: 2007.05.21.

fogalmazhatjuk meg, hogy a két felület ún. gradiens vektora párhuzamos egymással, azaz egymásnak skalárszorosa:

$$\bigtriangledown f(x) = -\lambda \bigtriangledown g(x)$$

ahol λ egy (egyelöre ismeretlen) nemnulla valós szám, $\bigtriangledown$pedig az ún. gradiens operátor, amelyik a parciális deriváltak alapján képzi a gradiensvektort a jól ismert módon.

Ennek alapján már le lehet írni a megoldást: az eredeti költségfüggvényünkhöz új tagokat kell hozzáadni, és így módosított költségfüggvényt kapunk, melyet $F(x)$-szel jelölünk:

$$F(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{D} \lambda_i (g_i(x) - c_i)$$

majd a módosított $F(x)$ költségfüggvénynek nemcsak az eredeti x vektor szerinti, hanem a most bevezetett λ_i paraméterek szerinti szélsöértékeit is meg kell találni. Azaz az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$\frac{\partial F(x)}{x_1} = 0$

$\frac{\partial F(x)}{x_2} = 0$

...

$\frac{\partial F(x)}{x_N} = 0$

$\frac{\partial F(x)}{\lambda_1} = 0$

$\frac{\partial F(x)}{\lambda_2} = 0$

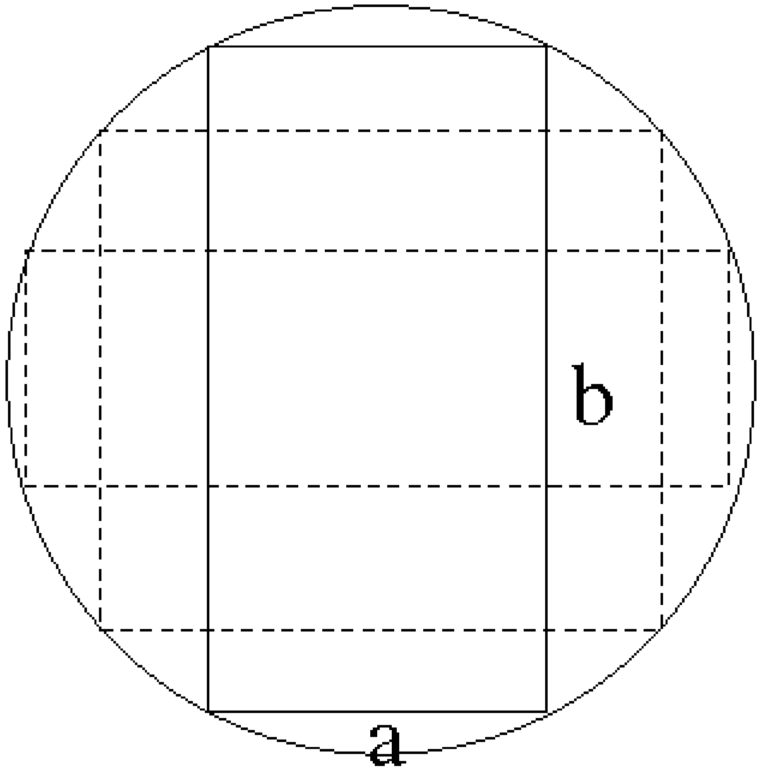
...

$\frac{\partial F(x)}{\lambda_D} = 0$

Az $F(x)$költségfüggvény $x_1, \ldots, x_N$szerinti deriváltjai a gradiensekre adott megkötéseket adják vissza, míg a λ_i-k az eredeti megkötéseket adják. Fontos megjegyezni, hogy az i-dik megkötésbe bevittük a c_i konstanst, ami a parciális deriváltakat nem rontja el, hiszen a konstans deriváltja nulla. A λ_i-k szerinti deriválás viszont így visszaadja az eredeti megkötéseket.

4. Példák

4.1. Körbe írható legnagyobb területü téglalap meghatározása. Feladat: Adott egy r sugarú kör, keressük meg azt a legnagyobb terület téglalapot, amelyik beleírható a körbe. A téglalap oldalait jelöljük a-val és b-vel.



Eredeti kölségfüggvény: $f(a,b) = a \cdot b$. Egyetlen megkötés van: $(a/2)^2 + (b/2)^2 = r^2$.

A módosított költségfüggvény: $F(a,b) = a \cdot b + \lambda[(a/2)^2 + (b/2)^2 = r^2]$

A megfelelö parciális deriváltak:

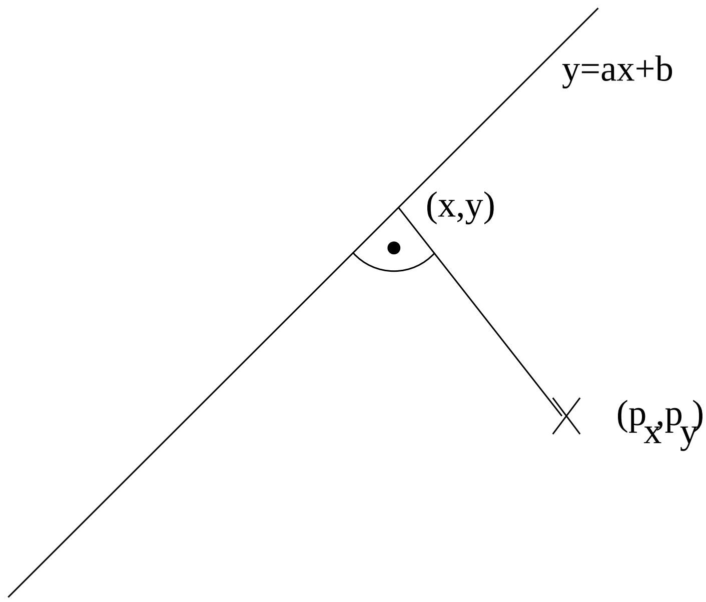
$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = b + \lambda a = 0$$

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = a + \lambda b = 0$$

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial \lambda} = (a/2)^2 + (b/2)^2 - r^2 = 0$$

Az elsö kettö feltételböl adódik, hogy $\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = -\lambda$, ebböl pedig kijön, hogy $a = b$ (továbbá $\lambda = -1$, de ez önmagában érdektelen). Tehát a megoldás – a várakozásoknak megfelelöen – egy négyzet. A harmadik összefüggésbe behelyettesítve kijön, hogy $a^2/2 = r^2$, azaz $a = \sqrt{2}r$ a négyzet oldala.

4.2. **Pont és egyenes távolsága kétdimenzióban.** Adott egy pont $p = (p_x, p_y)^T$ és egy egyenes $ax + b = y$. Keressük az egyenesen azt a pontot az egyenesen, amelyiknek a legkisebb a távolsága p-töl.



A távolságot négyzetreemelhetjük, az nem befolyásolja a minimumhelyet. A feladat tehát a $J = (x - p_x)^2(y - p_y)^2$kölségfüggvény minimumának meghatározása $ax + b = y$ kényszer segítségével.

A módosított költségfüggvény így néz ki:

$$J' = (x - p_x)^2 + (y - p_y)^2 + \lambda(ax + b - y)$$

A parciális deriváltak:

$$\frac{\partial J'}{\partial x} = 2(x - p_x) + \lambda a = 0$$

$$\frac{\partial J'}{\partial x} = 2(y - p_y) - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial J'}{\partial \lambda} = ax + b - y = 0$$

A másidik egyenletböl kijön, hogy $\lambda = 2(y - p_y)$. Ezt behelyettesíthetjük az elsöbe, és azt kapjuk:

$$2(x - p_x) + 2a(y - p_y) = 0$$

Ebböl pedig $y = -\frac{x - p_x - ap_y}{a}$. Ezt a harmadik egyenletbe téve kapjuk, hogy:

$$ax + b + \frac{x - p_x - ap_y}{a} = 0$$

Ebböl pedig kijön, hogy

$$x = \frac{p_x + ap_y - ab}{a^2 + 1}$$

Ezzel megkaptuk a végeredményt, hiszen y könnyen számítható x visszehelyettesítésével:

$$y = -\frac{x - p_x - ap_y}{a} = -\frac{\frac{p_x + ap_y - ab}{a^2+1} - p_x - ap_y}{a} = -\frac{p_x + ap_y - ab - p_x - ap_y - a^2 p_x - a^3 p_y}{a(a^2+1)} =$$

$$\frac{ab + a^2 p_x + a^3 p_y}{a(a^2+1)} = \frac{(b + p_x + a^2 p_y)}{a^2+1}$$

Érdekes lehet még a $(x, y)^T$ és (p_x, p_y) közötti távolság:

$$d = \sqrt{(x - p_x)^2 + (y - p_y)^2}$$

$$d^2 = \left(\frac{p_x + ap_y - ab}{a^2+1} - p_x\right)^2 + \left(\frac{(b + p_x + a^2 p_y)}{a^2+1} - p_y\right)^2$$

$$d^2 = \left(\frac{-a^2 p_x + ap_y - ab}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{b + p_x - a^2 p_y}{a^2+1}\right)^2$$

$$d = \frac{\sqrt{(-a^2 p_x + ap_y - ab)^2 + (b + p_x - a^2 p_y)^2}}{a^2+1}$$