TÚLHATÁROZOTT LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSA

HAJDER LEVENTE 2007.10.10.

1. $Ax = b$ (inhomogén) egyenletrendszer optimális megoldása

1.1. **Tétel.** Az $Ax = b$ túlhatározott inhomogén egyenletrendszer legkisebb négyzetes optimális megoldása az $x = (A^T A)^{-1} A^T b$ vektor.

1.2. **Bizonyítás.** Adott tegy $Ax = b$ egyenletrendszer, ahol az x vektor n darab ismeretlent tartalmaz, és összesen m darab egyenletünk van (tehát A mátrix méreten $m \times n$). A feladat legkisebb négyzetes értelemben minimalizálni az $\epsilon = Ax - b$ hibavektort. A költségfüggvény ezért így írható fel:

$$J = \epsilon^T \epsilon = (Ax - b)^T (Ax - b) = (x^T A^T - b^T)(Ax - b)$$

$$J = x^T A^T Ax - 2b^T Ax + b^T b$$

Ennek pedig az x szerinti parciális deriváltja adja a megoldást, ha egyenlő zérussal:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 2A^T Ax - 2A^T b = 0$$

Azaz a megoldás:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Megjegyzés: az $(A^T A)^{-1} A^T$ kifejezést az A mátrix Moore-Penrose-féle pszeudoinverzének is szokás nevezni. Ezt akkor is ki lehet számolni SVD segítégével, ha $(A^T A)$ mátrix szinguláris, azaz nem létezik inverze.

2. $Ax = 0$ (homogén) egyenletrendszer optimális megoldása $\| x \| = 1$ megszorítással

2.1. **Tétel.** Az $Ax = 0$ túlhatározott egyenletrendszer megoldása $\| x \| = 1$ megkötéssel az $A^T A$ mátrix legkisebb sajátértékéhez tartozó sajátvektor.

2.2. **Bizonyítás I..** Vezessünk be egy hibafüggvényt: $J = \| Ax \|$.

Lagrange optimalizálással hozzácsaphatjuk a $\|x \| = 1$ kényszert $J' = \| Ax \| - \lambda(1 - \| X \|) = x^T A^T Ax - \lambda(1 - x^T x)$.

Mindezt deriválva x szerint:

$$\frac{\delta J'}{\delta x} = 2A^T Ax - 2\lambda x = 0$$

$$A^T Ax = \lambda x$$

Azaz a hibafüggvény szélsőértékei (minimum vagy maximum) akkor következik be, amikor x az $A^T A$ sajátértéke.

A hibafüggvény minimuma ezekben az esetekben:

$$J = x^T A^T A x = \lambda x^T x = \lambda$$

Ez nyílvánvalóan akkor lesz a legkisebb, ha a legkisebb λ-t választjuk ($A^T A$ szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix, tehát az összes sajátértéke nemnegatív), azaz x az $A^T A$ mátrix lekisebb sajátértékéhez tartozó sajátvektor.

2.3. **Bizonyítás II..** A feladat, hogy a $J =\| Ax \|$hibafüggvényt minimalizáljuk. Használjuk A szinguláris érték szerinti felbontását: $A = USV^T$, ahol tudjuk, hogy U és V egyaránt ortonormált mátrix. A hibafüggvény így néz ki:

$$J =\| USV^T x \|$$

Mivel U ortonormált (azaz csak egy elforgatást reprezentál), igaz, hogy $\| USV^T x \|=\| DV^T x \|$. Ezen túl vezessük be az $y = V^T x$ jelölést. Az is igaz, hogy $\| V^T x \|=\| x \|= 1$, hiszen V is ortonormált.

Tehát a hibafüggvény így írható fel ($\| y \|= 1$megkötéssel)

$$J =\| Sy \|$$

Mivel S diagonál mátrix (csak a főátlóban vannak elemek), és az átló csökkenő sorrendben pozitív szinguláris értékeket tartalmaz. A hibafüggvény akkor lesz minimális, ha $y = [0, 0, ..., 0, 1]^T$. Ebben az esetben $x = V^T [0, 0, ..., 0, 1]^T$, azaz x az V utolsó sora, ami az SVD definíciójából adodóan az $A^T A$ legkisebb sajátértékéhez tartozó sajátvektor.

2.4. **Következmények.** A bizonyítás során azt mutattuk meg, hogy az $||x|| = 1$ feltétellel $x^T A^T A x$ kifejezés minimális, ha x értékének az $A^T A$ mátrix legkisebb sajátértékéhez tartozó sajátvektort választjuk. Mindez akkor is igaz, ha $x^T B x$ értékét szeretnénk minimalizálni. Természtesen ekkor B legkisebb sajátértékéhez tartozó sajátvektort keressük. Ha nem minimális értéket, hanem maximálisat keresünk, a két bizonyításból következik, hogy B legnagyobb sajátértékéhez tartozó sajátvektor a megoldás.