QR DEKOMPOZÍCIÓ

HAJDER LEVENTE 2007.10.12.

A QR-dekompozíció célja egy tetszőleges A négyzetes mátrix felbontása $A = QR$ alakban, ahol Q egy ortonormált mátrix, R pedig pedig felső háromszögmátrix. (Sajnos a számítógépel látás és grafika tudományterületén R-rel az elforgatást, azaz egy ortonormált mátrixot szoktak jelölni, ez néhol megzavarhatja az Olvasót)

A QR-decompozíció valójában nem csak az $A = QR$ felbontást jelenti, hanem elképzelhető egy $A = QL$ felbontás is, ahol L egy alsó háromszögmátrix. Ezt QL-transzformációnak is nevezik. A mátrixra írjuk fel a következő összefüggéseket:

$$A^T = QR$$

$$A^T = QL$$

akkor $A = R^T Q^T$és $A = L^T Q^T$ alakot kapunk, ahol R^Talsó háromszögmátrix, L^Tfelső háromszögmátrix, Q^Tpedig továbbra is ortonormált. Ezeket szokás LQ és RQ transzformációnak is nevezni. A külön-külön elnevezés ellenére az alapelv minden esetben ugyanaz.

Láthatjuk tehát, hogy összesen négy különböző eset lehetséges, melyből kettő-kettő a transzponálással visszavezethető egymásra. Ebben a jegyzetben mindössze egy esetet nézünk meg, az RQ transzformációt.

A megoldást három elforgatás segítségével valósítjuk meg, melyeket az alábbi mátrix segítségével írjuk le:

$$Q_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$Q_Y = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$Q_Z = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q_X az X tengely körüli forgatást írja le, $Q_Y$az Y körüli, Q_z pedig értelemszerűen a Z tengely körüli forgást adja.

Vegyük most az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

kiinduló mátrixot. Első lépésben szorozzuk meg Q_x-szel jobbról A-t úgy, hogy a $(3,2)$-es index nulla legyen, és jelöljük az eredményt B-vel:

$$AQ_x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & 0 & b_{33} \end{bmatrix} = B$$

Ez akkor lehetséges, ha $a_{32}\cos\alpha + a_{33}\sin\alpha = 0$, ennek pedig megoldása:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{a_{32}}{a_{33}}\right)$$

(Ha $a_{33} = 0$, akkor $\alpha = \frac{\pi}{2}$-t kell választani.)

Második lépésben szorozzuk meg B-t jobbról Q_Y-nal úgy, hogy az eredmény $(3,1)$-es indexű eleme zérus legyen:

$$BQ_Y = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} = C$$

Úgy kell megválasztani β-t, hogy $b_{31}\cos\beta + b_{33}\sin\beta = 0$ legyen. Ez pedig akkor terjesül, ha

$$\beta = \tan^{-1}\left(-\frac{b_{31}}{b_{33}}\right)$$

Az eredmény nem befolyásolja a C mátrix $(3,2)$-es indexű elemét, a forgatás után ugyanis a C mátrix második oszlopa megegyezik B második sorával.

Végezetül C-t jobbról szorozzuk Q_Z-vel úgy, hogy az eredmény mátrix $(2,1)$-es eleme kinullázódjon:

$$CQ_Z = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} = D$$

Ahhoz, hogy $d_{21} = 0$ legyen, teljesülnie kell az alábbi egyenletnek: $c_{21}\cos\gamma + c_{22}\sin\gamma = 0$, ami akkor teljesül, ha

$$\gamma = \tan^{-1}\left(-\frac{c_{21}}{c_{22}}\right)$$

Az eredmény nem befolyásolja a korábban kinullázott elemeket, ezt a beszorzás elvégzésével ellenőrizhetjük.

Igaz tehát, hogy $AQ_XQ_YQ_Z = D$, ahol D egy felső háromszögmátrix. Bevezetve a $Q_XQ_YQ_Z = Q^T$ ortonormált mátrixot és beszorozva Q-val jobbról az egyenletet kapjuk, hogy

$$A = DQ$$

Azaz a szorzattá alakítás teljesül, $R = D$ választásával valóban egy felső háromszög mátrix és egy ortonormált mátrix szorzatát kapjuk. (Q is ortonormált, hiszen egy ortonormált mátrix transzponáltja is ortonormált.)