

Számítógépes látás alapjai

Csetverikov Dmitrij, Hajder Levente

Eötvös Lóránd Egyetem, Informatikai Kar



Többkamerás 3D-s rekonstrukció alapjai

- 1 Többkamerás 3D-s rekonstrukció elvei
- 2 Rekonstrukció merőleges és gyengén perspektív kamerával
 - Tomasi-Kanade faktorizáció
- 3 Többképes perspektív rekonstrukció
- 4 Sztereo rekonstrukciók összefűzése
- 5 Kötegbehangolás
- 6 Tomasi-Kanade faktorizáció hiányzó adatokkal

Áttekintés

- 1 Többkamerás 3D-s rekonstrukció elvei
- 2 Rekonstrukció merőleges és gyengén perspektív kamerával
 - Tomasi-Kanade faktorizáció
- 3 Többképes perspektív rekonstrukció
- 4 Sztereo rekonstrukciók összefűzése
- 5 Köteghangolrás
- 6 Tomasi-Kanade faktorizáció hiányzó adatokkal

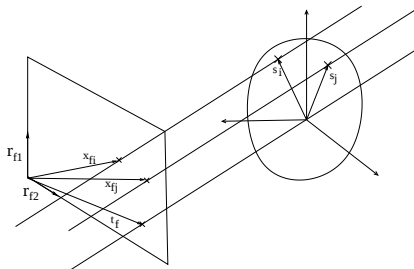
Lehetséges sokkamerás megoldások

- 1 Kétkamerás perspektív rekonstrukciók összefűzésével
 - Nehézkes
 - Hiba összeadódik
- 2 Teljes perspektív N -nézőpontos megoldások
 - Feladat nemlineáris
 - Megoldás elég bonyolult.
- 3 Egyszerűbb kameramodellek
 - Feladat lineárisává válik
 - Merőleges vetítés
 - Gyengén perspektív vetítés

Áttekintés

- 1 Többkamerás 3D-s rekonstrukció elvei
- 2 **Rekonstrukció merőleges és gyengén perspektív kamerával**
 - Tomasi-Kanade faktorizáció
- 3 Többképes perspektív rekonstrukció
- 4 Sztereo rekonstrukciók összefűzése
- 5 Kötegbehangelés
- 6 Tomasi-Kanade faktorizáció hiányzó adatokkal

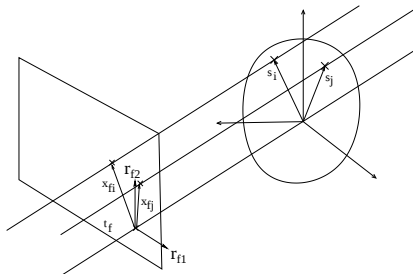
Merőleges vetítés



Pontok vetítése

$$\begin{bmatrix} u_{fp} \\ v_{fp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{f1}^T \\ \mathbf{r}_{f2}^T \end{bmatrix} \mathbf{s}_p - \mathbf{t}_f \quad (1)$$

Merőleges vetítés



Vetítés: súlyponti koordináta középponttal.

$$\begin{bmatrix} u_{fp} \\ v_{fp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{f1}^T \\ \mathbf{r}_{f2}^T \end{bmatrix} \mathbf{s}_p \quad (2)$$

Áttekintés

- 1 Többkamerás 3D-s rekonstrukció elvei
- 2 Rekonstrukció merőleges és gyengén perspektív kamerával
 - Tomasi-Kanade faktorizáció
- 3 Többképes perspektív rekonstrukció
- 4 Sztereo rekonstrukciók összefűzése
- 5 Köteghangolás
- 6 Tomasi-Kanade faktorizáció hiányzó adatokkal

Tomasi-Kanade faktorizáció

- Követett pontokat a **W** mérési mátrixba tesszük és szorzattá bontjuk (faktorizáljuk):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1P} \\ V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1P} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2P} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{F1} & U_{F2} & \cdots & U_{FP} \\ V_{F1} & V_{F2} & \cdots & V_{FP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11}^T \\ \mathbf{r}_{12}^T \\ \mathbf{r}_{21}^T \\ \mathbf{r}_{22}^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{F1}^T \\ \mathbf{r}_{F2}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{s}_P \end{bmatrix} \\
 \mathbf{W} &= \mathbf{MS}
 \end{aligned}$$

Tomasi-Kanade faktorizáció

- $\mathbf{W} = \mathbf{MS}$ alak miatt $\mathbf{W}$ rangja nem lehet több 3-nál.
 - $\mathbf{M}$ mérete $2F \times 3$
 - $\mathbf{S}$ mérete $3 \times P$
 - Lemma: mátrix rangja szorzás után a szorzandók rangjának maximumánál nem lehet nagyobb.
- $\mathbf{W}$ rangjának csökkentése: Szinguláris érték szerinti felbontással (SVD)
 - Szinguláris értékek és vektorok közül az első hármat megtartjuk, a többit eldobjuk.
 - $\mathbf{W} = \mathbf{USV}^T \rightarrow \mathbf{W} = \mathbf{U}'\mathbf{S}'\mathbf{V}'^T$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{S}' = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Faktorizáció többértelműsége

- Faktorizáció nem egyértelmű

$$\mathbf{W} = \mathbf{MS} = (\mathbf{MQ}^{-1})(\mathbf{QS})$$

- $\mathbf{Q}$ egy 3×3 -as mátrix.
- $\mathbf{M}_{\text{aff}} = \mathbf{MQ}^{-1}$ neve: affin mozgás mátrix.
- $\mathbf{S}_{\text{aff}} = \mathbf{QS}$ neve: affin struktúra mátrix.
- Többértelműség feloldása: $\mathbf{r}$ vektorokra a megkötések figyelembe vétele.
 - Kamera bázisvektorai egységnyi hosszúak:

$$\mathbf{r}_{i1}^T \mathbf{r}_{i1} = 1$$

$$\mathbf{r}_{i2}^T \mathbf{r}_{i2} = 1$$

- Bázisvektorok páronként merőlegesek egymásra:

$$\mathbf{r}_{i1}^T \mathbf{r}_{i2} = 0$$

Többértelműség feloldása

- Affin $\rightarrow$ valós kamera átszámítás:

$$\mathbf{M}_{\text{aff}} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{11}^T \mathbf{Q} \\ \mathbf{m}_{12}^T \mathbf{Q} \\ \vdots \\ \mathbf{m}_{F1}^T \mathbf{Q} \\ \mathbf{m}_{F2}^T \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11}^T \\ \mathbf{r}_{12}^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{F1}^T \\ \mathbf{r}_{F2}^T \end{bmatrix}$$

- Megkötések a bázisvektorra:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i1}^T \mathbf{r}_{i1} &= 1 &\rightarrow & \mathbf{m}_{i1}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{m}_{i1} = 1 \\ \mathbf{r}_{i2}^T \mathbf{r}_{i2} &= 1 &\rightarrow & \mathbf{m}_{i2}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{m}_{i2} = 1 \\ \mathbf{r}_{i1}^T \mathbf{r}_{i2} &= 0 &\rightarrow & \mathbf{m}_{i1}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{m}_{i2} = 0 \end{aligned}$$

Q mátrix számítása

- Bevezetjük az alábbi jelölést:

$$\mathbf{L} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ l_2 & l_4 & l_5 \\ l_3 & l_5 & l_6 \end{bmatrix}$$

- Megjegyzés: $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$ mátrix szimmetrikus
- Megkötések felírása inhomogén lineáris egyenletrendszerrel:

$$\mathbf{A}_i \mathbf{l} = \mathbf{b}_i$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} m_{i1,x}^2 & 2m_{i1,x}m_{i1,y} & 2m_{i1,x}m_{i1,z} & m_{i1,y}^2 & 2m_{i1,y}m_{i1,z} & m_{i1,z}^2 \\ m_{i2,x}^2 & 2m_{i2,x}m_{i2,y} & 2m_{i2,x}m_{i2,z} & m_{i2,y}^2 & 2m_{i2,y}m_{i2,z} & m_{i2,z}^2 \\ m_{i1,x}m_{i2,x} & e_1 & e_2 & m_{i1,y}m_{i2,y} & m_{i1,y}m_{i2,z} + m_{i2,y}m_{i1,z} & m_{i1,z}m_{i2,z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{l} = [l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6]^T \quad \mathbf{b}_i = [1, 1, 0]^T$$

- ahol $m_{jk,x}$, $m_{jk,y}$ és $m_{jk,z}$ számok az $\mathbf{m}_{jk}$ vektor x , y és z koordinátái.
- és $e_1 = m_{i1,x}m_{i2,y} + m_{i2,x}m_{i1,y}$, $e_2 = m_{i1,x}m_{i2,z} + m_{i2,x}m_{i1,z}$

Q mátrix számítása

- Megkötések figyelembe vétele az összes képre: $\mathbf{A}\mathbf{l} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T & \mathbf{A}_2^T & \dots & \mathbf{A}_F^T \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{b} = [1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots, 1, 1, 0]^T$$

- Megoldás: túlhatározott lineáris (homogén) egyenletrendszer optimális megoldásával
- $\mathbf{Q}$ mátrix előállítása $\mathbf{L}$ -ből SVD-vel:

$$\mathbf{L} \stackrel{(SVD)}{=} \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$$
$$\mathbf{Q} = \mathbf{U}\sqrt{\mathbf{S}}$$

Gyengén perspektív vetítés

- Megkötések átalakulnak:
 - Bázisvektorok továbbra is merőlegesek egymásra:

$$\mathbf{r}_{i1}^T \mathbf{r}_{i2} = 0$$

- Hosszuk nem egységnyi, de a két vektor hossza azonos

$$\mathbf{r}_{i1}^T \mathbf{r}_{i1} = \mathbf{r}_{i2}^T \mathbf{r}_{i2}$$

- $\mathbf{Q}$ mátrixra az egyenletek módosulnak

$$\mathbf{m}_{i1}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{m}_{i1} - \mathbf{m}_{i2}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{m}_{i2} = 0$$

$$\mathbf{m}_{i1}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{m}_{i2} = 0$$

- Lineáris, de homogén egyenletet kaptunk.

Tomasi-Kanade faktorizáció összefoglalása

- 1 Követett pontokat a $\mathbf{W}$ mérési mátrixba tesszük
- 2 Minden pontra a súlypontba helyezzük az origót, a módosított koordinátákat a $\tilde{\mathbf{W}}$ mátrixba helyezzük
- 3 Kiszámítjuk $\tilde{\mathbf{W}}$ mátrix SVD felbontását: $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{USV}^T$.
- 4 Kinullázzuk a negyedik szinguláris értéktől az összes diagonális elemet $\mathbf{S}$ -ben: $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}'$.
- 5 Affin faktorizáció: $\mathbf{M}_{\text{aff}} = \mathbf{U}\sqrt{\mathbf{S}'}$ és $\mathbf{S}_{\text{aff}} = \sqrt{\mathbf{S}'}\mathbf{V}^T$
- 6 $\mathbf{Q}$ számítása metrikus kényszerekből
- 7 Metrikus faktorizáció: $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{aff}}\mathbf{Q}$ és $\mathbf{S} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}_{\text{aff}}$

Áttekintés

- 1 Többkamerás 3D-s rekonstrukció elvei
- 2 Rekonstrukció merőleges és gyengén perspektív kamerával
 - Tomasi-Kanade faktorizáció
- 3 Többképes perspektív rekonstrukció
- 4 Sztereo rekonstrukciók összefűzése
- 5 Kötegbehangolás
- 6 Tomasi-Kanade faktorizáció hiányzó adatokkal

Többképes perspektív rekonstrukció

- Háromképes rekonstrukció
 - Epipoláris geometria továbbgondolása
 - Összefüggések adhatók pontok és egyenesek között
 - Új fogalmak: fundamentális mátrix helyett trifokális tenzor...stb.
 - Gyakorlati jelentősége csekély
- Tomasi-Kanade faktorizáció kiterjesztése perspektív kameramodellre
 - Algoritmus neve: autokalibráció
 - Nehézség: projektív mélység (homogén osztás skalárja) minden pontra más
 - Megoldása lehetséges, meglehetősen bonyolult
- Egyszerűbb megoldás: sok sztereo rekonstrukció összefűzése

Áttekintés

- 1 Többkamerás 3D-s rekonstrukció elvei
- 2 Rekonstrukció merőleges és gyengén perspektív kamerával
 - Tomasi-Kanade faktorizáció
- 3 Többképes perspektív rekonstrukció
- 4 Sztereo rekonstrukciók összefűzése
- 5 Köteghangolrás
- 6 Tomasi-Kanade faktorizáció hiányzó adatokkal

Rekonstrukció sztereo (rész)rekonstrukciók összefűzésével

- Képpáronként sztereó rekonstrukció lehetséges
- Kamera kalibráció:
 - Belső paraméterek: pl. Zhang-módszer (sakktáblával)
 - Külső paraméterek: esszenciális mátrix felbontásával
- Térbeli pontok: trianguláció
- Eredmény:
 - Ahány képpár, annyi pontfelhő
 - Képpárok között elmozdulás/elforgatás

Sztereo eredmények összefüzése

- Adott két pontfelhő
 - Mindegyik a saját (első) kamerájához rögzített koordinátarendszerben
- Két pontfelhő N darab közös pontjait a $\{\mathbf{p}_i\}$ és $\{\mathbf{q}_i\}$ ($i = 1 \dots N$) halmazokba gyűjtjük.
- A pontok között hasonlósági transzformáció adható meg

$$\mathbf{q}_i = s\mathbf{R}\mathbf{p}_i + \mathbf{t}$$

- s : skálázás
- $\mathbf{R}$: elforgatás
- $\mathbf{t}$: eltolás

Sztereo eredmények összefűzése

- Feladat: optimális regisztráció megoldása

$$\sum_{i=1}^N \|\mathbf{q}_i - \mathbf{sR}\mathbf{p}_i - \mathbf{t}\|^2$$

- Megoldás bizonyítással: "3d-s ponthalmazok regisztrációja" jegyzetben
 - Optimális $\mathbf{t}$ számítása: ponthalmazok súlypontjának különbsége
 - Optimális elforgatás:

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^N \mathbf{q}'_i \mathbf{p}'_i{}^T$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}\mathbf{U}^T \leftarrow \mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$$

- Optimális skálázás:

$$s = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{q}'_i{}^T \mathbf{R} \mathbf{p}'_i}{\sum_{i=1}^N \mathbf{p}'_i{}^T \mathbf{p}'_i}$$

Áttekintés

- 1 Többkamerás 3D-s rekonstrukció elvei
- 2 Rekonstrukció merőleges és gyengén perspektív kamerával
 - Tomasi-Kanade faktorizáció
- 3 Többképes perspektív rekonstrukció
- 4 Sztereo rekonstrukciók összefűzése
- 5 Köteghangolás
- 6 Tomasi-Kanade faktorizáció hiányzó adatokkal

Eredmények optimalizálása numerikus algoritmussal

- Az i -edik képkockán a j -edik pont függ
 - az i -edik kamera paramétereitől és
 - a j -edik pont térbeli koordinátáitól.
- Levenberg-Marquard algoritmus használata javasolt.
 - Jakobi mátrixot kell számítani
 - Sok kép és pont esetén nagyon ritka
- Ritka Levenberg-Marquard algoritmus neve:
 - Kötegbehangolás (magyarul)
 - Bundle adjustment (angolul)

Levenberg-Marquard algoritmus rekonstrukciós problémára

- A paraméterek értékének változtatása:

$$\Delta \mathbf{p} = \left(\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda \mathbf{E} \right)^{-1} \mathbf{J}^T \epsilon_p$$

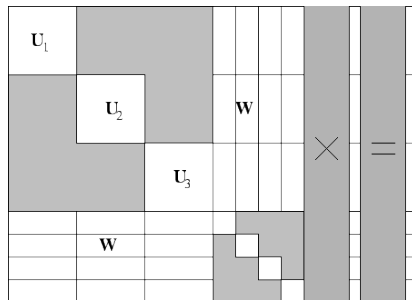
- Beállítandó paraméterek: kamerák paraméterei + pontok térbeli
 - Kamerák paraméterei
 - Térbeli pontok koordinátái
- Például 20 perspektív kamera, 1000 pont:
 $20 \cdot 11 + 3 \cdot 1000 = 3220$ paraméter
 - $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ mátrix mérete 3220×3220 .
 - Invertálás rendkívül lassú.

Jakobi mátrix

The diagram shows a 12x12 matrix with columns labeled $P_1, P_2, P_3, M_1, M_2, M_3, M_4$ and rows labeled $P_1, P_2, P_3, M_1, M_2, M_3, M_4$. The matrix is partitioned into blocks. The top-left 4x4 block is white. The top-right 4x8 block is gray. The middle-left 4x4 block is white. The middle-right 4x8 block is gray. The bottom-left 4x4 block is white. The bottom-right 4x8 block is gray. The diagonal elements are white, and the off-diagonal elements are gray.

Jakobi mátrix

Jakobi mátrix



Normálegyenlet

Kötegbhangolás: normálegyenlet

- Normálegyenlet blokkosítva

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^T & \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{m} \\ \Delta \mathbf{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{\mathbf{m}} \\ \epsilon_{\mathbf{s}} \end{bmatrix}$$

- Ha balról megszorozzuk az $\begin{bmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{XV}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}$, az eredmény:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} - \mathbf{XV}^T\mathbf{X}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{X}^T & \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{m} \\ \Delta \mathbf{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{\mathbf{m}} - \mathbf{XV}^{-1}\epsilon_{\mathbf{s}} \\ \epsilon_{\mathbf{s}} \end{bmatrix}$$

Kötegbhangolás: normálegyenlet megoldása

- Megoldás:

$$\Delta \mathbf{m} = \left(\mathbf{U} - \mathbf{XV}^T \mathbf{X}^T \right)^{-1} \left(\epsilon_{\mathbf{m}} - \mathbf{XV}^{-1} \epsilon_{\mathbf{s}} \right)$$

$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{V}^{-1} \left(\epsilon_{\mathbf{s}} - \mathbf{X}^T \Delta \mathbf{m} \right)$$

- Invertálni kell:

- $\mathbf{V}$

- Blokkos mátrix, kis blokkokat önállóan kell invertálni

- $\left(\mathbf{U} - \mathbf{XV}^{-1} \mathbf{X}^T \right)^{-1}$

- Speciális szerkezetű mátrix, szintén blokkokra (azon belül összegekre) esik szét.

Áttekintés

- 1 Többkamerás 3D-s rekonstrukció elvei
- 2 Rekonstrukció merőleges és gyengén perspektív kamerával
 - Tomasi-Kanade faktorizáció
- 3 Többképes perspektív rekonstrukció
- 4 Sztereo rekonstrukciók összefűzése
- 5 Kötegbehangolás
- 6 Tomasi-Kanade faktorizáció hiányzó adatokkal

Rekonstrukció hiányzó adatokkal

- Sztereó rekonstrukciónál nem gond a hiányzó adat
 - Ha csak egy képen látszik, lehetetlenség térben rekonstruálni.
- Kötegbengangolás képes kezelni a hiányzó adatokat
 - Az $\mathbf{U}_i$ -val és $\mathbf{V}_j$ -vel jelölt blokkmátrixok számítása kevesebb szummából áll.
- Tomasi-Kanade faktORIZÁCIÓ viszont átalakítást igényel

Kitekintés: Gyengén perspektív kamera kalibrációja

- A matematikai probléma:

$$\begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_P \\ v_1 & \dots & v_P \end{bmatrix} = [\mathbf{M}|\mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \dots & \mathbf{X}_P \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

- ahol $\mathbf{M} = q\hat{\mathbf{R}}$ és
- $\hat{\mathbf{R}}$ az $\mathbf{R}$ mátrix első két sorát tartalmazza.
- Kamerakalibrációnál a kameraparaméterek nem ismertek, a feladat egy minimalizáció:

$$\arg \min_{q, \hat{\mathbf{R}}, \mathbf{b}} \sum_i \left\| \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} - [\mathbf{M}|\mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (4)$$

- Ez majdnem pontregisztrációs probléma
 - Bal oldalon nem három, hanem két koordináta szerepel.

Kitekintés: Gyengén perspektív kamera kalibrációja

- Megoldás: bal oldalt is tegyük háromdimenzióssá!
 - $\hat{\mathbf{R}}$ két sora kiegészíthető harmadikra. Ha $\mathbf{r}_1^T$ és $\mathbf{r}_2^T$ az első két sor, a harmadik vektoriális szorzással megkapható:

$$\mathbf{r}_3^T = \mathbf{r}_1^T \times \mathbf{r}_2^T \quad (5)$$

- $\mathbf{b}$ harmadik koordinátája legyen zérus
 - Bal oldali harmadik koordináta (kiegészítő-lépés): $w_i = q\mathbf{r}_3^T \mathbf{X}_i + \mathbf{b}$
- A regisztrációt és a kiegészítést folyamatosan ismételjük.
- Bizonyítható, hogy konvergálni fog az optimális megoldáshoz.

Tomasi-Kanade faktorizáció

- Faktorizációs probléma, súlypontra hozás esetén:

$$\mathbf{W} = \mathbf{M}\mathbf{S} \quad (6)$$

- Faktorizációs probléma, ha nem a súlypontban vagyunk

$$\mathbf{W} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M}_1 & \mathbf{b}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{M}_F & \mathbf{b}_F \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_P \\ 1 & \cdot & 1 \end{array} \right] = [\mathbf{M}|\mathbf{b}] \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_P \\ 1 & \cdot & 1 \end{array} \right] \quad (7)$$

- Megoldás a kameramozgás és a térbeli pontok felváltott számításával
 - Kameramozgás számítása: M-lépés
 - Struktúra számítása : S-lépés
 - Utolsó feladat a harmadik koordinátákat számítani:
Kiegészítő-lépés
 - Mindkét lépés optimálisan számítható!

Tomasi-Kanade faktorizáció: S-lépés

- Egy térbeli pontra felírhatjuk az egyenletet:

$$\begin{bmatrix} u_{ij} \\ v_{ij} \\ w_{ij} \end{bmatrix} = [\mathbf{M}_j \mid \mathbf{b}_j] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_j \mathbf{X}_i + \mathbf{b}_j \quad (8)$$

- Lineáris probléma $\mathbf{X}_i$ -re nézve, a megoldás optimálisan számítható az összes *kamera* adataival:

$$\mathbf{X}_i = \left(\mathbf{M}^T \mathbf{M} \right)^{-1} \mathbf{M}^T (\mathbf{W}_i - \mathbf{b}) \quad (9)$$

- ahol $\mathbf{W}_i$ a $\mathbf{W}$ mérési mátrix megfelelő oszlopa.
- Hiányzó adatok: Ha egy képen nem látszik a pont, annak mozgásmátrixa nem szerepel a mozgásvektorban

Tomasi-Kanade faktorizáció: M-lépés

- A mozgásmátrix számítása pontregisztrációs probléma, hiszen:

$$\begin{bmatrix} u_{ij} \\ v_{ij} \\ w_{ij} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_j \mathbf{X}_i + \mathbf{b}_j = q_j \mathbf{R}_j \mathbf{X}_i + \mathbf{b}_j \quad (10)$$

- Az eltolásvektor jele itt $\mathbf{b}_j$
- Forgatás: $\mathbf{R}_j$
- Skála: q_j
- Hiányzó adatok: Ha a képen nem látszik egy pont, a koordinátái nem szerepelnek a regisztrációs mátrixban.

Tomasi-Kanade faktorizáció: Kiegészítő-lépés

- Minden harmadik koordinátát újra kell számolni
 - minden egyes képkocka
 - minden egyes pontjára,
 - minden egyes lépés után.

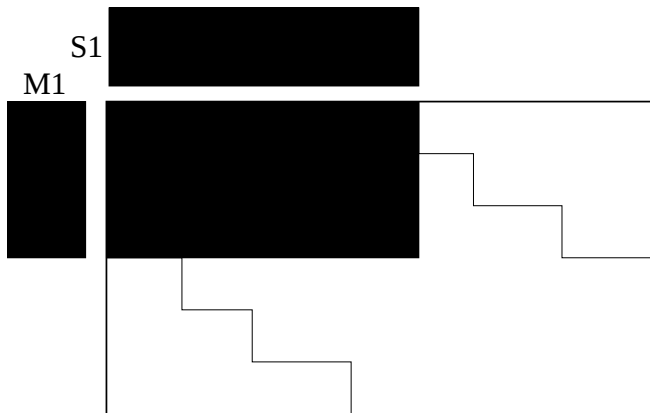
Tomasi-Kanade faktorizáció Hiányzó adatokkal

- 1 Kezdeti mozgás- és struktúramátrixok számítása
 - Tomasi-Kanade faktorizációk összefűzésével (ld. később)
 - Harmadik koordináták számítása (Kiegészítő-lépés)
- 2 Konvergenciáig ismételni:
 - Mozgásmátrixok számítása (M-lépés): pontregisztrációs feladat
 - Harmadik koordináták számítása (Kiegészítő-lépés)
 - Struktúrák (térbeli koordináták) számítása (S-lépés): lineáris feladat
 - Harmadik koordináták számítása (Kiegészítő-lépés)
- Minden lépés négyzetes hibát csökkent, ezért a konvergencia garantált.
 - Lokális minimum sajnos előfordulhat.

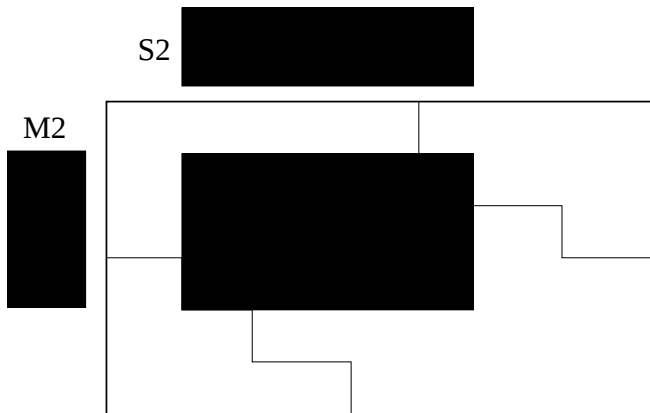
Tomasi-Kanade faktorizáció: inicializálás

- Ötlet: teljes részmátrixokat keresünk
 - Három kép kell legalább
 - Ezért 1–3, 2–4, 3–5, ... képek közös pontjaiból lehet faktorizálni.
- Ezeket a Tomasi-Kanade algoritmussal felbontjuk
- Részeredményeket összefűzzük

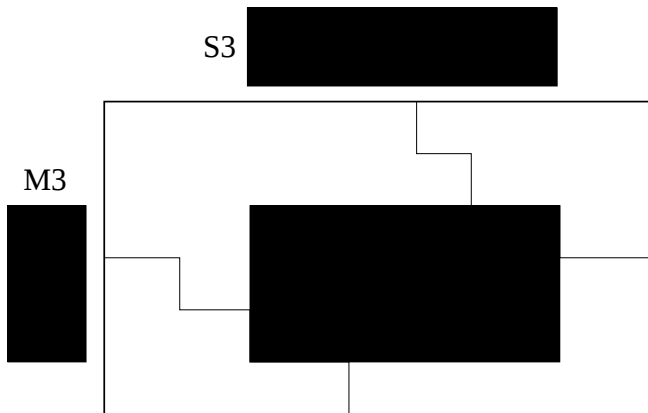
Tomasi-Kanade faktorizáció: részfaktorizációk



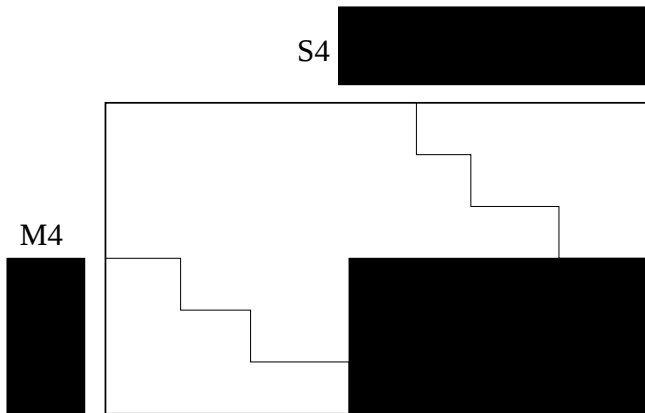
Tomasi-Kanade faktorizáció: részfaktorizációk



Tomasi-Kanade faktORIZÁCIÓ: RÉSZFAKTORIZÁCIÓK



Tomasi-Kanade faktORIZÁCIÓ: RÉSZFAKTORIZÁCIÓK



Tomasi-Kanade faktorizáció: inicializálás

- Részfaktorizációk összefűzése nem teljesen triviális.
- Tfh. két képen adottak a részfaktorizációk
 - q_j skalár és $\mathbf{R}_j$, $\mathbf{b}_j$, $\mathbf{S}_j$ mátrixok ismertek.
 - Továbbá q_{j+1} skalár $\mathbf{R}_{j+1}$, $\mathbf{b}_{j+1}$ és $\mathbf{S}_{j+1}$ mátrixok is.
- 3D-s pontthalmazok összefűzése: pontregisztrációs probléma.
 - Legyenek az összeforgatás paraméterei: $\mathbf{R}$ forgatás, q skálázás és $\mathbf{t}$ eltolás
 - Ekkor az i -dik pontra felírható:

$$\mathbf{s}'_i = q\mathbf{R}(\mathbf{s}_i - \mathbf{o}_1) + \mathbf{o}_2 \quad (11)$$

- Mozgásmátrixok elemeinek összefűzése:
 - $\mathbf{M}_{j+1} \leftarrow \frac{1}{q}\mathbf{M}_{j+1}\mathbf{R}^T$
 - $\mathbf{t}_{j+1} \leftarrow \mathbf{t}_{j+1} + q\mathbf{M}_{j+1}\mathbf{R}\mathbf{o}_1 - \mathbf{M}_{j+1}\mathbf{o}_2$