Számítógépes képfeldolgozás

Tófalvi Tamás

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest
tofi@inf.elte.hu

Informatikai Kar

ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM

Küszöbölés

1. A szürkeségi küszöbölés alapelvei
   - Hisztogram-alapú küszöbölés
2. Két küszöbválasztási módszer
   - Otsu módszere
   - Hisztogram-modellezés Gauss-eloszlásokkal
3. A küszöbölés példái és elemzése
   - Küszöbölési példák
   - A küszöbölés elemzése

Szürkeségi küszöbölés

- Alapvető **képszegmentálási** technika
- A következő **feltételekre** épül
  - a jelenet egyenletesen megvilágított, sík felületekből áll
  - a kép közelítőleg homogén régiók halmaza
- **Cél**
  - egy vagy több **küszöb** megadása, amelyek az intenzitástartományt intervallumokra bontják

  $\Rightarrow$ **intenzitásosztályokat** definiálnak
- **Eredmény**
  - az objektumokat a pixelintenzitások osztályokba sorolásával címkézzük

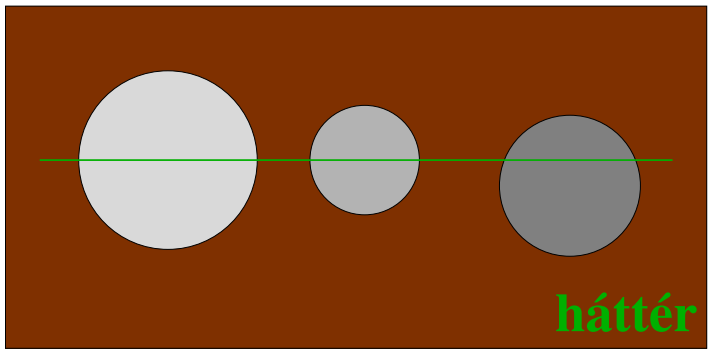
  $\Rightarrow$ az objektumok elválnak a háttértől

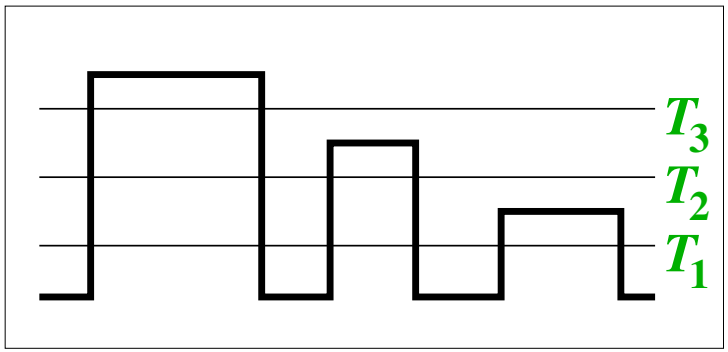
Az N-szintű küszöbölés definíciója

- Adjunk meg $N-1$ küszöböt: T_k, $k = 1, \ldots, N-1$, $N \geq 2$, úgy, hogy az $f(x,y)$ pixel az n-edik osztályba kerüljön, ha

$$T_{n-1} \leq f(x,y) < T_n, \quad n = 1, \ldots, N$$

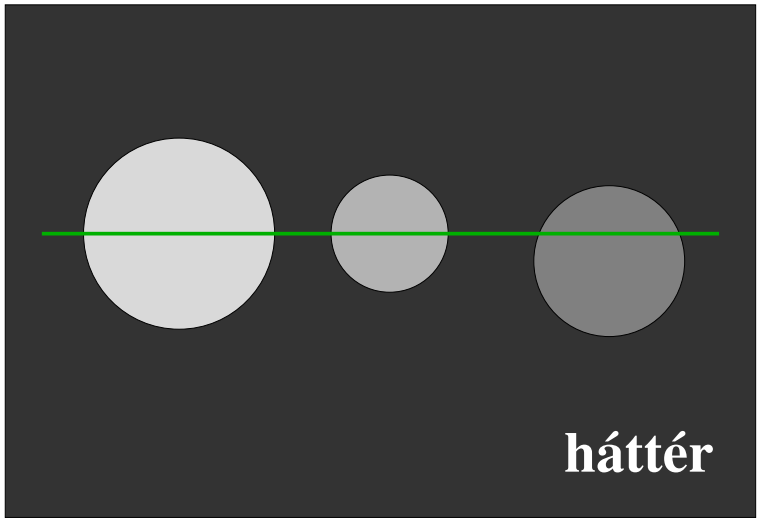
- Definíció szerint $T_0 = 0$ és $T_N = G_{max} + 1 = 256$



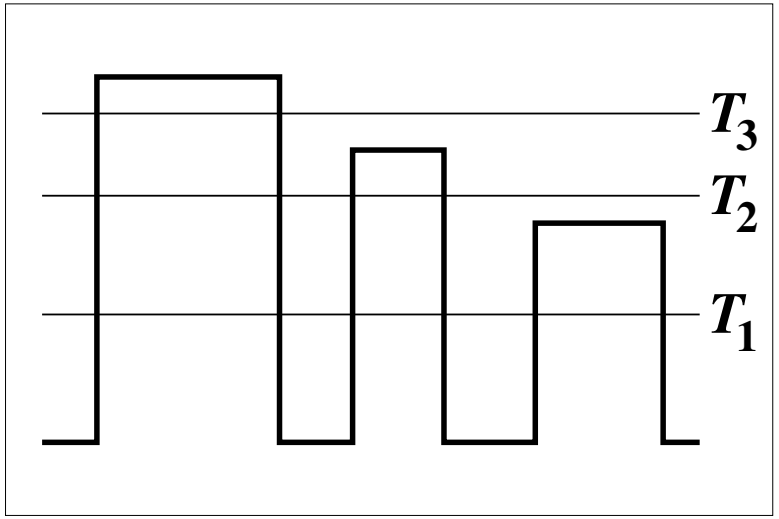


A négyszintű küszöbölés szemléltetése. $T_0 = 0$ és $T_4 = 256$. Az első szint a háttér.

A négyszintű küszöbölés szemléltetése



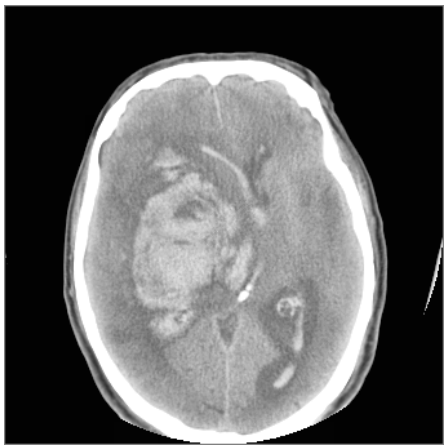
kép



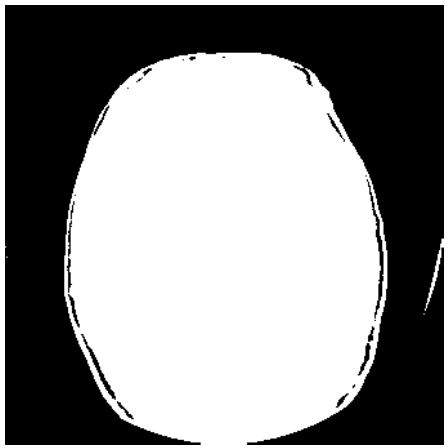
a kép profilja a vonal mentén

- $T_0 = 0$ és $T_4 = 256$.
- Az első szint a sötét háttér
- A negyedik szint a legvilágosabb korong

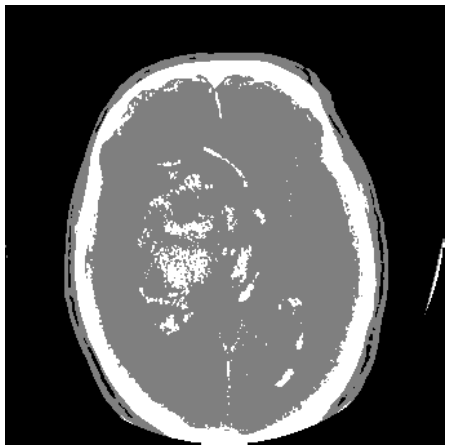
Példák automatikus két- és háromszintű küszöbölésre



eredeti kép



kétszintű küszöbölés



háromszintű küszöbölés

- Egyetlen küszöb: $N = 2$
  - **kétszintű** (bináris) küszöbölés, más néven **binarizálás**

  $\Rightarrow$ ebben a kurzusban ezzel foglalkozunk
- **Többszintű** küszöbölés: $N > 2$
  - az $N = 3$ esetet gyakran **háromszintűnek** nevezik

Tartalom

1. A szürkeségi küszöbölés alapelvei
   - Hisztogram-alapú küszöbölés
2. Két küszöbválasztási módszer
   - Otsu módszere
   - Hisztogram-modellezés Gauss-eloszlásokkal
3. A küszöbölés példái és elemzése
   - Küszöbölési példák
   - A küszöbölés elemzése

Szürkeségi hisztogram

- A k szürkeségi érték előfordulási valószínűsége a képen

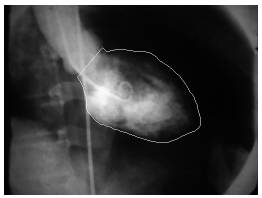
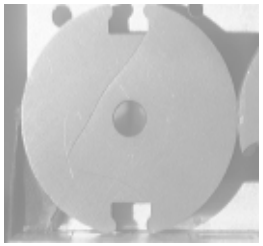
$$P(k) = \frac{n_k}{n}$$

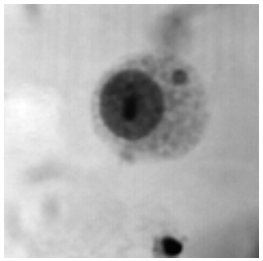
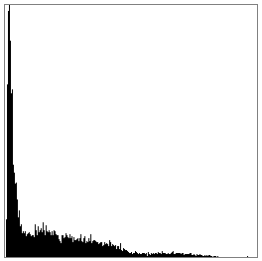
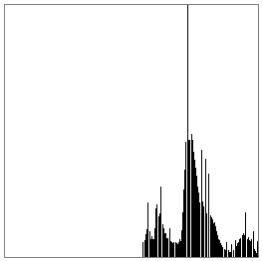
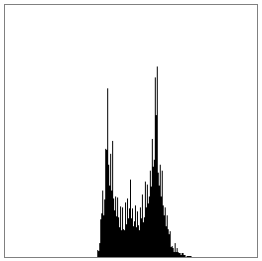
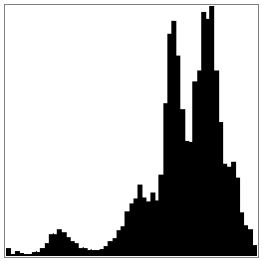
  - n_k a k szürkeségi értékű pixelek száma, $k = 0, 1, \ldots, 255$
  - n a kép pixeleinek teljes száma

  $\Rightarrow$ $P(k)$ megmutatja, milyen gyakran fordul elő k a képen

- A számítás egyszerű és gyors
  - kezdőérték: $p[k] = 0$
  - végigpásztázzuk a képet, k szürkeségi értéknél $p[k] \leftarrow p[k] + 1$
  - a pásztázás után normalizálunk: $P[k] = p[k]/n$

A hisztogramok alaptípusai

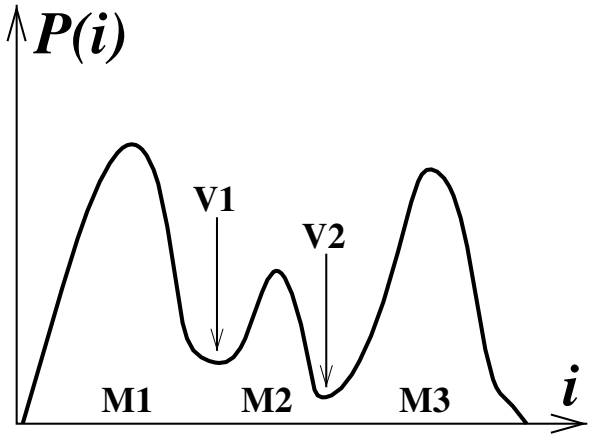



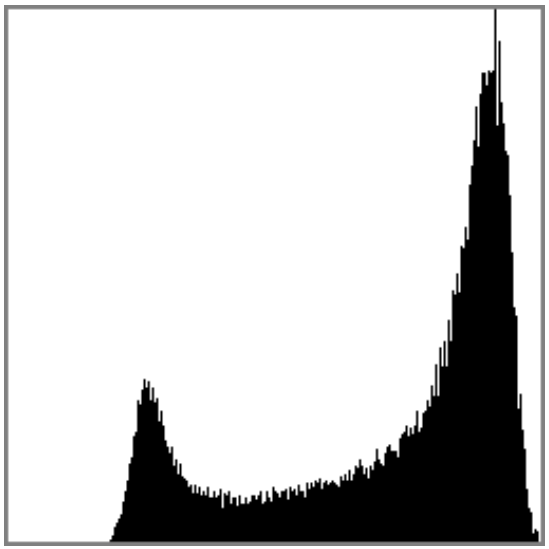
túl sötét | túl világos | alacsony kontraszt | jó kontraszt

- A szürkeségi szintek
  - a sötét végen sűrűsödnek: túl sötét
  - a világos végen sűrűsödnek: túl világos
  - középen sűrűsödnek: szűk dinamikatartomány
  - a teljes hisztogramon szétterülnek: jó kontraszt

Jól küszöbölhető hisztogramok



ideális trimodális

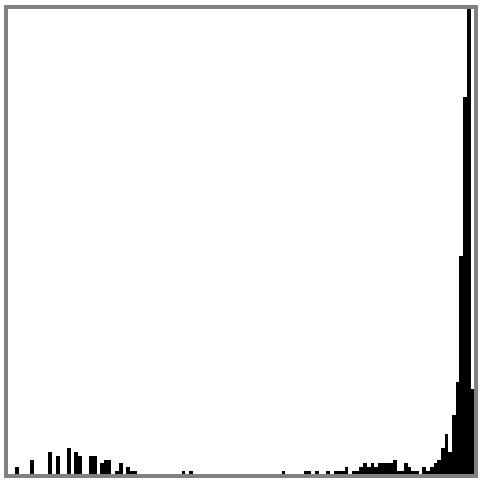


valós bimodális

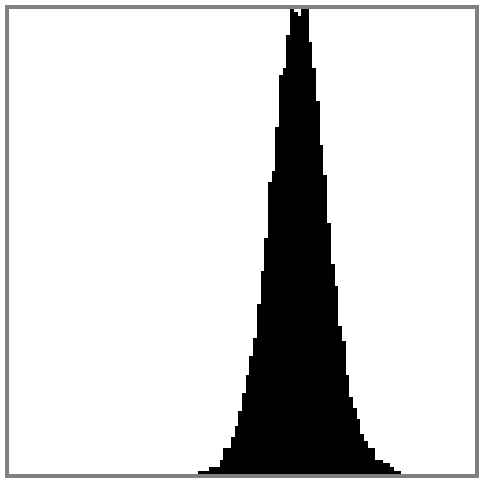
- Két vagy több jól elkülönülő módusz (M)
- Határozott minimumok a móduszok közötti völgyekben (V)

$\Rightarrow$ Az intenzitásosztályok könnyen szétválaszthatók

Rosszul küszöbölhető hisztogramok



nehezen küszöbölhető



unimodális

- Módusz az intenzitástartomány szélén
  - $\Rightarrow$ a hisztogram nehezen modellezhető
- A módusz nem különül el élesen
- Unimodális hisztogram
  - $\Rightarrow$ nehezen küszöbölhető, de nem reménytelen

Példák jó és rossz küszöbválasztásra

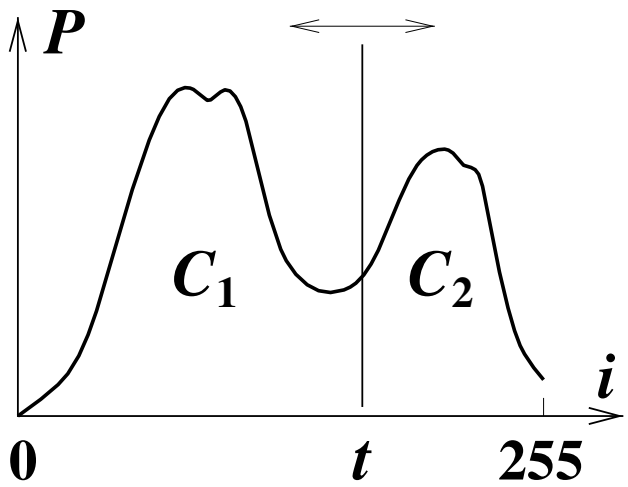
kép | jó 1 | jó 2 | túl alacsony | túl magas | hisztogram

- Több küszöb is elfogadható
  - a hisztogram völgye (G) közelében
- A rossz küszöbök hatása eltérő
  - a túl alacsony küszöb (L) szétszakítja a vonalakat
  - a túl magas küszöb (H) összeolvasztja a vonalakat

Tartalom

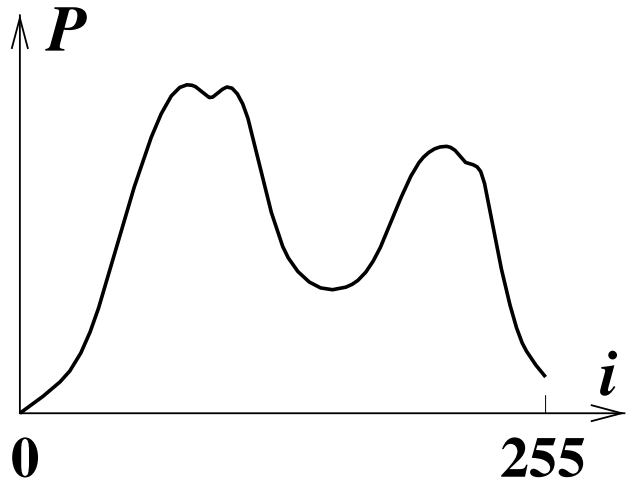
1. A szürkeségi küszöbölés alapelvei
   - Hisztogram-alapú küszöbölés
2. Két küszöbválasztási módszer
   - Otsu módszere
   - Hisztogram-modellezés Gauss-eloszlásokkal
3. A küszöbölés példái és elemzése
   - Küszöbölési példák
   - A küszöbölés elemzése

Az osztályok maximális szétválasztása



- N. Otsu (Japán) javasolta 1979-ben
- Tekintsünk egy t **jelölt küszöböt**
  - t a szürkeségi értékek két osztályát definiálja
- Definiáljuk az **osztályok szétválasztottságának** mértékét
  - az osztályok közötti távolság t függvényében
- Keressük a **szétválasztást maximalizáló** t_{opt} küszöböt

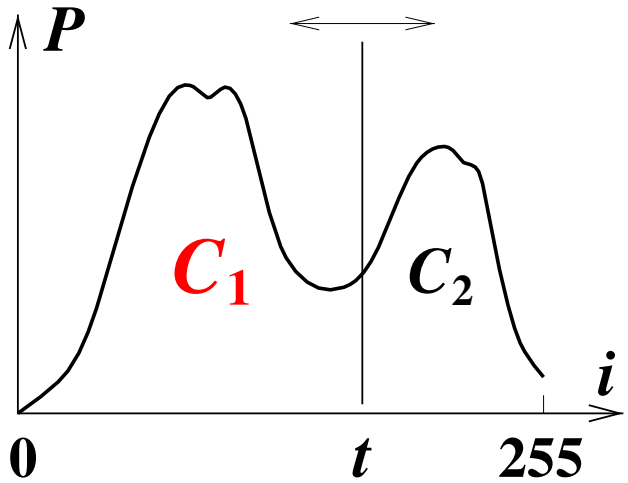
A teljes hisztogram átlaga és szórásnégyzete



$$\mu = \sum_{i=0}^{255} iP(i) \qquad \sigma^2 = \sum_{i=0}^{255} (i-\mu)^2 P(i)$$

- A teljes hisztogram tartománya: $[0, 255]$
- $P(i)$ normalizált: $\sum_{i=0}^{255} P(i) = 1$

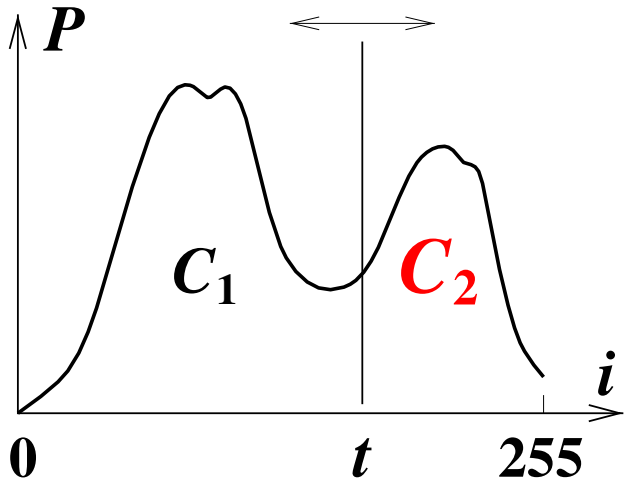
A C_1 osztály átlaga és szórásnégyzete



$$\mu_1(t) = \frac{1}{q_1(t)} \sum_{i=0}^{t} iP(i) \qquad \sigma_1^2(t) = \frac{1}{q_1(t)} \sum_{i=0}^{t} [i - \mu_1(t)]^2 P(i)$$

- A C_1 osztály tartománya: $[0, t]$
- A C_1 osztály súlya (relatív mérete): $q_1(t) = \sum_{i=0}^{t} P(i)$

A C_2 osztály átlaga és szórásnégyzete



$$\mu_2(t) = \frac{1}{q_2(t)} \sum_{i=t+1}^{255} iP(i) \qquad \sigma_2^2(t) = \frac{1}{q_2(t)} \sum_{i=t+1}^{255} [i - \mu_2(t)]^2 P(i)$$

- A C_2 osztály tartománya: $[t+1, 255]$
- A C_2 osztály súlya: $q_2(t) = \sum_{i=t+1}^{255} P(i)$; $q_2(t) = 1 - q_1(t)$

Osztályon belüli és osztályok közötti szórásnégyzet

- Minden t-re a teljes σ^2 szórásnégyzet két összetevőből áll:
  - **osztályon belüli szórásnégyzet**
    $\Rightarrow$ a két osztály szórásnégyzetének súlyozott összege
  - **osztályok közötti szórásnégyzet**
    $\Rightarrow$ az osztályok közötti távolság
- Az osztályon belüli szórásnégyzet

$$\sigma_W^2(t) = q_1(t)\sigma_1^2(t) + q_2(t)\sigma_2^2(t)$$

$\Rightarrow$ viszont $\mu = q_1(t)\mu_1(t) + q_2(t)\mu_2(t)$

- Az osztályok közötti szórásnégyzet a σ^2 maradék része

$$\sigma_B^2(t) = \sigma^2 - \sigma_W^2(t)$$

Küszöbválasztás mint optimalizálási feladat

- Könnyen belátható, hogy

$$\begin{aligned}\sigma_B^2(t) &= q_1(t)q_2(t)\left[\mu_1(t)-\mu_2(t)\right]^2 \\ &= q_1(t)\left[1-q_1(t)\right]\left[\mu_1(t)-\mu_2(t)\right]^2\end{aligned} \tag{1}$$

- A t_{opt} optimális küszöb választja szét legjobban a két osztályt
- $\sigma_W^2(t)+\sigma_B^2(t)$ állandó $\longrightarrow$ két egyenértékű lehetőség:
  - *minimalizáljuk $\sigma_W^2(t)$-t, az osztályok átfedését*
  - *maximalizáljuk $\sigma_B^2(t)$-t, az osztályok távolságát*

$\Rightarrow$ A második lehetőséget használjuk

$\sigma_B^2(t)$ kiszámítása

- $\sigma_B^2(t)$ kiszámítható **a definíció alapján**:
  - minden t-re kiszámítjuk az (1) egyenlet összetevőit: $q_1(t), \mu_1(t), \mu_2(t)$

  $\Rightarrow$ minden t-re végig kell pásztázni a hisztogramot

- Van azonban gyorsabb, **rekurzív megoldás** is:

$$q_1(t+1) = q_1(t) + P(t+1), \qquad q_1(0) = P(0)$$

$$\mu_1(t+1) = \frac{q_1(t)\mu_1(t) + (t+1)P(t+1)}{q_1(t+1)}, \qquad \mu_1(0) = 0 \quad (2)$$

$$\mu_2(t+1) = \frac{\mu - q_1(t+1)\mu_1(t+1)}{1 - q_1(t+1)}$$

Otsu algoritmusának összefoglalása

Algoritmus: Otsu-féle küszöbválasztás

1. Számítsuk ki a kép $P(i)$ hisztogramját és μ értékét
2. Minden $0 < t < G_{max}$ esetén számítsuk ki rekurzívan $q_1(t)$, $\mu_1(t)$ és $\mu_2(t)$ értékét a (2) egyenlet szerint[1]
3. Számítsuk ki $\sigma_B^2(t)$-t az (1) egyenlet szerint
4. A küszöb: $t_{opt} = \arg\max_t \sigma_B^2(t)$

[1] A hisztogram elején esetleg előforduló nullákat hagyjuk ki!

Az Otsu-algoritmus tulajdonságai

- **Előnyök**
  - általános: nem feltételez konkrét hisztogramalakot
  - jól működik, stabil
  - kiterjeszthető *többszintű küszöbölésre*
    - $\Rightarrow$ N küszöb és $M = G_{max} + 1$ szürkeségi szint esetén M^N méretű tömbben kell maximumot keresni
- **Hátrányok**
  - feltételezi, hogy $\sigma_B^2(t)$ unimodális: ez nem mindig igaz
  - $\sigma_B^2(t)$ gyakran lapos, hamis maximumok léphetnek fel
  - hajlamos mesterségesen megnövelni a kis osztályokat
    - a kiegyensúlyozott osztálysúlyokat részesíti előnyben, lásd az (1) költségfüggvényt
    - $\Rightarrow$ a kis osztályok összeolvadhatnak más osztályokkal és elveszhetnek

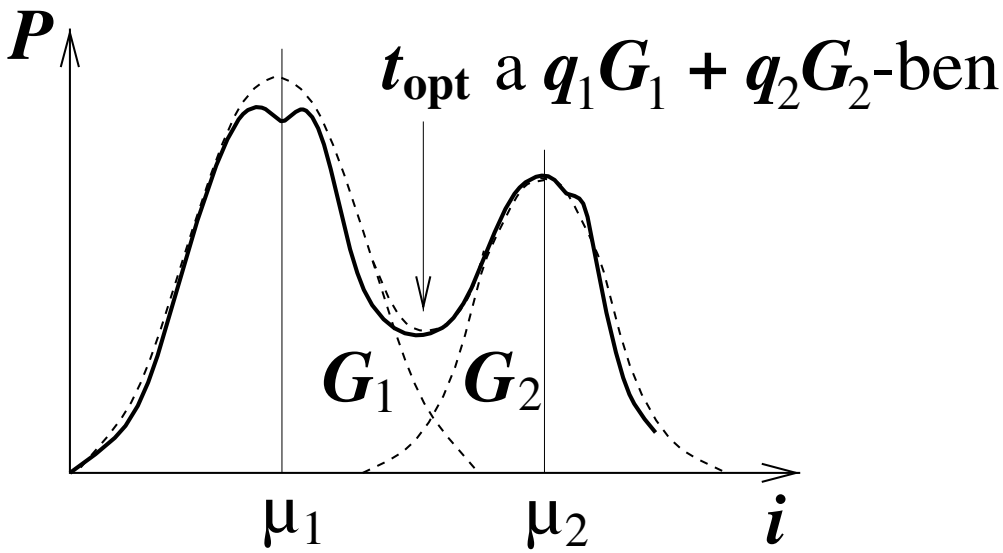
Tartalom

1 A szürkeségi küszöbölés alapelvei
- Hisztogram-alapú küszöbölés

2 Két küszöbválasztási módszer
- Otsu módszere
- Hisztogram-modellezés Gauss-eloszlásokkal

3 A küszöbölés példái és elemzése
- Küszöbölési példák
- A küszöbölés elemzése

A hisztogram modellezése Gauss-keverékkel



- Tegyük fel, hogy a $P(i)$ hisztogram **két Gauss-eloszlás keveréke**

$$P(i) \approx G(i) \doteq q_1 G_1(i) + q_2 G_2(i)$$

- Illesszük a modellt $P(i)$-re, becsüljük a paramétereit
- Az optimális küszöböt **analitikusan**, a modellfüggvény völgyeként határozzuk meg

Paraméteres modelleloszlás

- A modelleloszlás két Gauss-függvény súlyozott összege

$$G(i,\mathbf{p}) = \frac{q_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} + \frac{q_2}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2} \qquad (3)$$

$\Rightarrow$ Gyakran használt többkomponensű Gauss-modell, más néven Gauss-keverék (*Gaussian mixture*)

- Hat paramétere van: $\mathbf{p} = (q_1, q_2, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2)$
- q_1 és q_2 a két Gauss-eloszlás súlya
  - $q_1 + q_2 = 1$

  $\Rightarrow$ **öt szabad paraméter** (szabadsági fok)

  $\Rightarrow$ q_2-t elhagyva jelölje $\mathbf{p}' = (q_1, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2)$

A modelleloszlás illesztése a hisztogramra

- Az illesztéshez minimalizáljuk az ötparaméteres hibát:

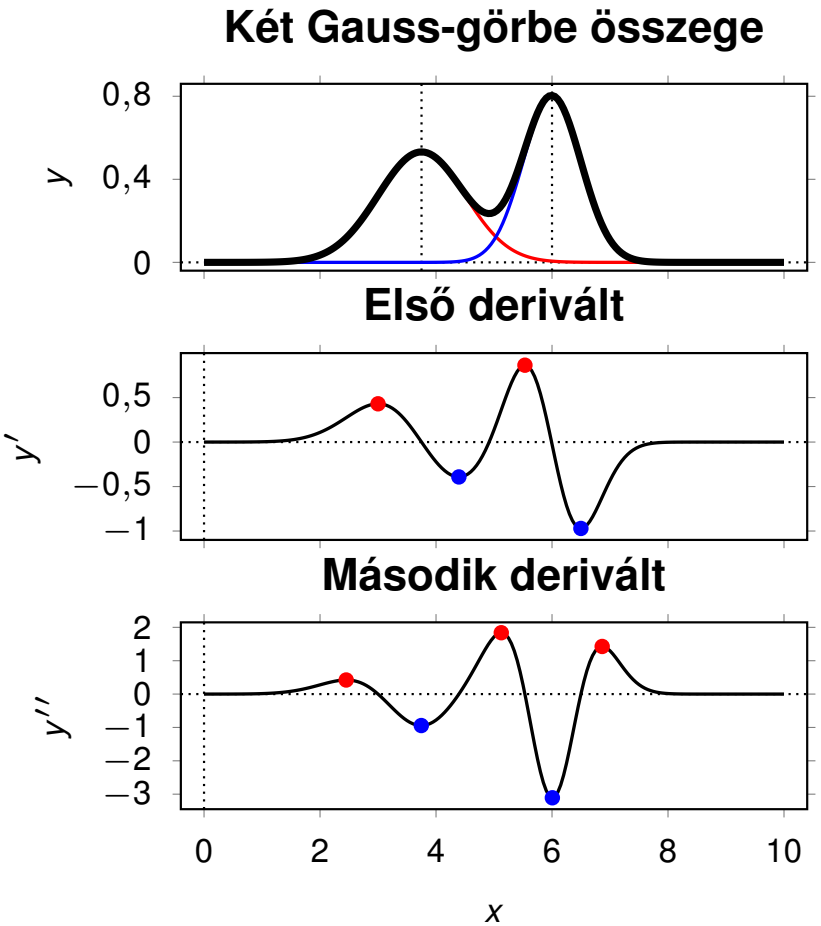
$$C(\mathbf{p}') = \sum_{i=0}^{G_{max}} \left[G(i, \mathbf{p}') - P(i) \right]^2 \tag{4}$$

  $\Rightarrow$ megbecsüljük az optimális $\hat{\mathbf{p}}$ paramétereket
- Nemlineáris minimalizáló algoritmus használható
  - Newton-módszer
  - Levenberg–Marquardt-módszer
  - sztochasztikus módszerek
- Az iteratív minimalizálás *sikertelen* is lehet
  - pl. nem konvergál

  $\Rightarrow$ a Gauss-keverék modell nem alkalmazható

  $\Rightarrow$ az illesztésnek nincs megoldása, nincs küszöb

A paraméterek kezdőértékeinek becslése



E. F. Glynn ábrája nyomán
(Stowers Inst. for Med. Res.)

- Ha a móduszok jól elkülönülnek
  - $\Rightarrow$ csak mérsékelten fednek át
- Átlag: μ_1, μ_2
  - $P(i)$ domináns maximumai, **vagy**
  - $P''(i)$ domináns völgyei
- Szórás: σ_1, σ_2
  - $P'(i)$ maximuma és völgye 2σ távolságra van
- Súly: $q_1 = 0{,}5$

Optimális küszöb

- Tegyük fel, hogy a modellillesztés sikeres volt

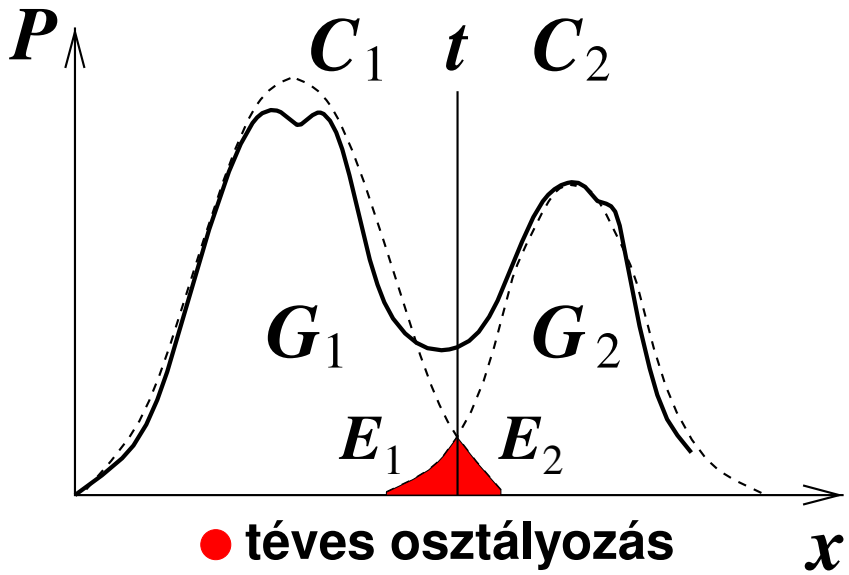
$\Rightarrow$ Megkaptuk az optimális paramétereket:

- $(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2)$

- Hogyan számítsuk ki ezekből az optimális küszöböt?

A téves osztályozás valószínűsége

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) = \int_{-\infty}^{t} G_2(x)\,dx + \int_{t}^{\infty} G_1(x)\,dx$$



- $E_1(t)$: C_2-beli pixelt C_1-be sorolunk
- $E_2(t)$: C_1-beli pixelt C_2-be sorolunk

Az osztályozási hiba minimalizálása

- A hiba minimális, ha

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

- Bizonyítható, hogy az **optimális küszöb**, t_{opt}, a következő egyenlet megoldása:

$$At^2 + Bt + C = 0, \tag{5}$$

ahol

$$\begin{aligned} A &= \hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_2^2 \\ B &= 2(\hat{\mu}_1\hat{\sigma}_2^2 - \hat{\mu}_2\hat{\sigma}_1^2), \\ C &= \hat{\sigma}_1^2\hat{\mu}_2^2 - \hat{\sigma}_2^2\hat{\mu}_1^2 + 2\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 \ln\left(\frac{\hat{\sigma}_2\hat{q}_1}{\hat{\sigma}_1\hat{q}_2}\right) \end{aligned}$$

Az optimális küszöb esetei

- Az egyenletnek **két valós gyöke** van $[0, 255]$-ben
  $\Rightarrow$ azt a gyököt választjuk, amelyre az $E(t)$ hiba kisebb
- Az egyenletnek **nincs valós gyöke** $[0, 255]$-ben
  $\Rightarrow$ nincs optimális küszöb
- Ha $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, egyetlen optimális küszöb létezik:

$$t_{opt} = \frac{\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2}{2} + \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2} \ln\left(\frac{\hat{q}_1}{\hat{q}_2}\right)$$

A Gauss-keverékre épülő küszöbválasztás összefoglalása

Algoritmus: küszöbválasztás Gauss-keverékkel

1. Számítsuk ki a $P(i)$ normalizált hisztogramot
2. Minimalizáljuk a (4) és (3) által definiált $C(\mathbf{p}')$ illesztési hibafüggvényt
   - $\Rightarrow$ megkapjuk az optimális paraméterbecsléseket: $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$
3. Oldjuk meg az (5) egyenletet t-re, két gyököt kapunk
4. Csak a $[0, 255]$-be eső valós gyököket vesszük figyelembe
   - ha egyetlen ilyen gyök van, az lesz t_{opt}
   - ha két gyök van, azt választjuk, amelyre $E(t)$ kisebb

A Gauss-keverék módszer tulajdonságai

Előnyök

- Meglehetősen általános hisztogrammodell
- Érvényes modell esetén minimális a téves osztályozás valószínűsége
- Kis méretű osztályokra is működhet

Hátrányok

- A valós hisztogram nem mindig írható le Gauss-keverékkel
  - $\Rightarrow$ a szürkeségi értékek **végesek** és **nemnegatívak**
  - $\Rightarrow$ a tartomány széléhez közeli csúcs nem Gauss-alakú
- A többszintű kiterjesztés egyszerűsítést igényel
  - $\Rightarrow$ pl. jól elkülönülő móduszok feltételezése
- A közeli vagy lapos móduszok nehezen észlelhetők

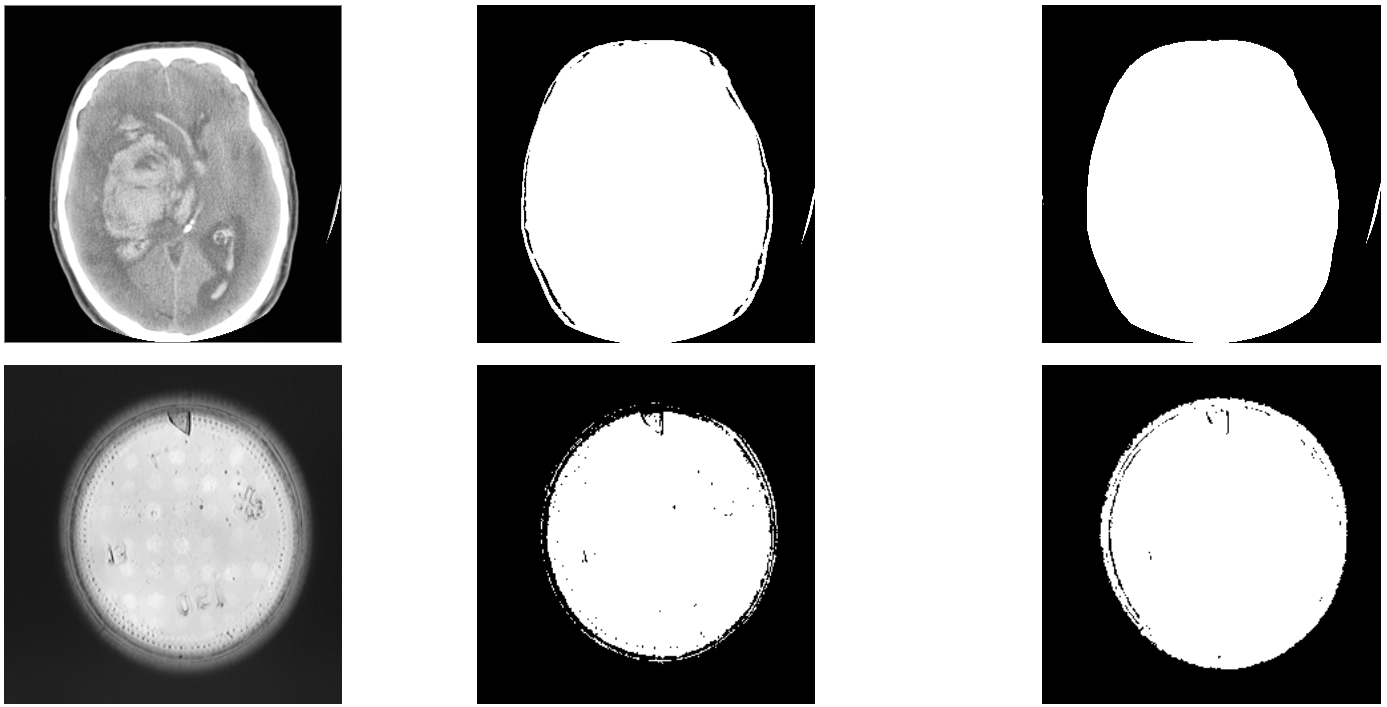
Tartalom

1 A szürkeségi küszöbölés alapelvei
- Hisztogram-alapú küszöbölés

2 Két küszöbválasztási módszer
- Otsu módszere
- Hisztogram-modellezés Gauss-eloszlásokkal

3 A küszöbölés példái és elemzése
- Küszöbölési példák
- A küszöbölés elemzése

1. példa: jó küszöbölés

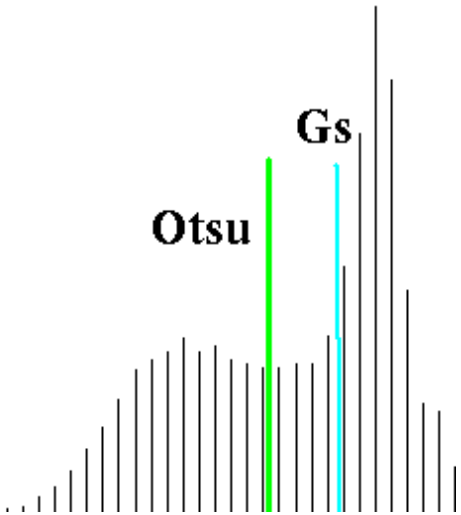


képek Otsu-eredmények Gauss-eredmények

- A Gauss-módszer küszöbe mindkét esetben alacsonyabb
  - $\Rightarrow$ kissé jobban követi az objektumkontúrokat, mint az Otsu-módszer

2. példa: kielégítő eredmények

kép



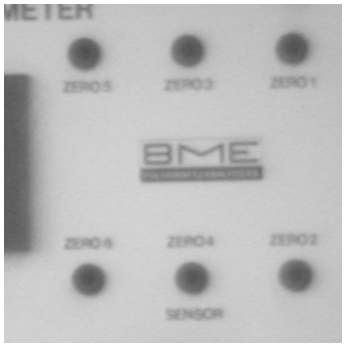
hisztogram

Otsu

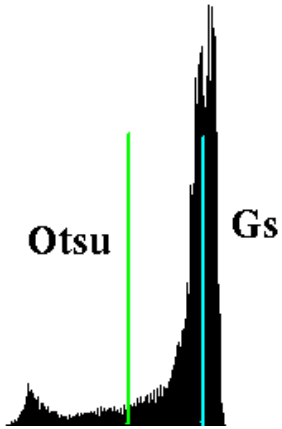
Gauss

- Az Otsu-küszöb, $T = 158$, pontosan a völgyben van
  $\Rightarrow$ a vonalak jól elkülönülnek
- A Gauss-küszöb, $T = 199$, kissé túl magas
  $\Rightarrow$ néhány vonal nem különül el jól

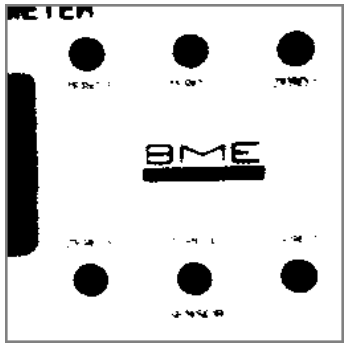
3. példa: a Gauss-keverék gyenge eredményt ad



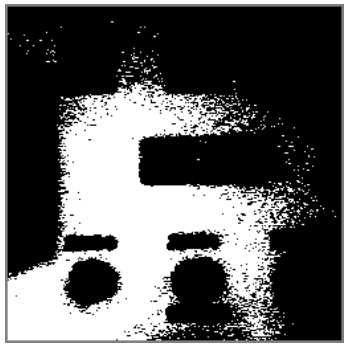
kép



hisztogram



Otsu $T = 159$



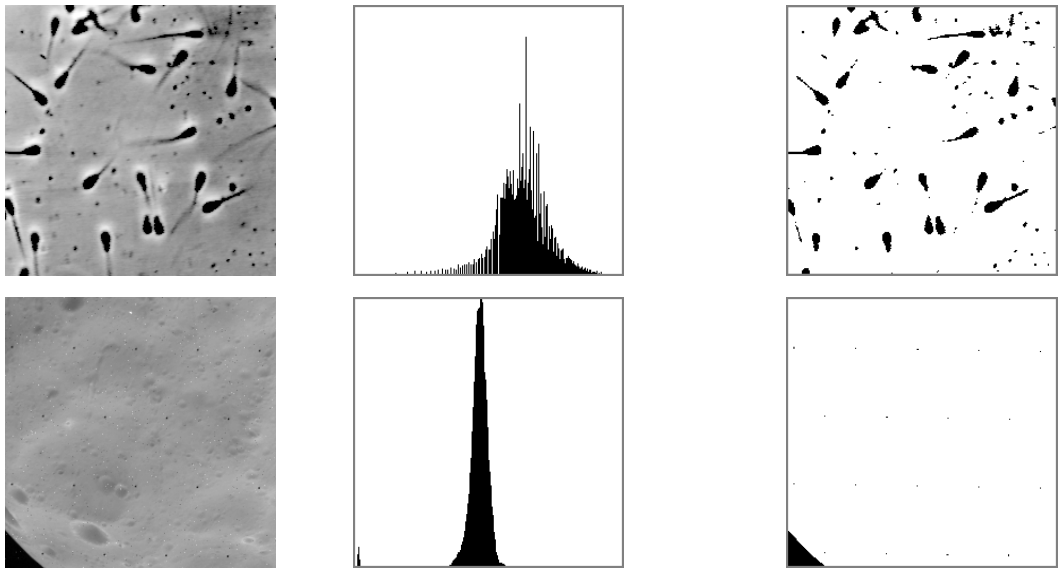
Gauss $T = 201$

- Az **Otsu-algoritmus** megtalálja a kis pixelosztályt (sötét korongok)
- A **Gauss-algoritmus** a háttér két magas csúcsát próbálja szétválasztani

$\Rightarrow$ Zajos völgyet választ, mert a valódi osztály

- túl kicsi
- túl távol van

4. példa: a Gauss-keverék nem ad eredményt



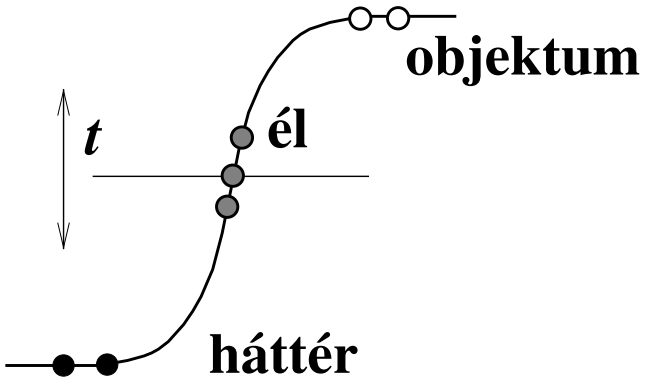
kép hisztogram Otsu eredménye

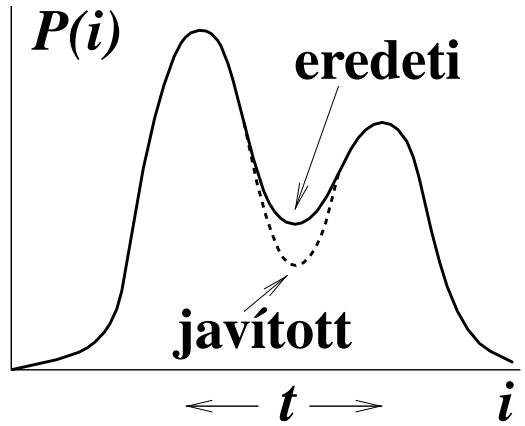
- Csak az Otsu-algoritmus ad eredményt
- A Gauss-algoritmus egyáltalán **nem ad eredményt**
  - felső sor: unimodális hisztogram, sikertelen illesztés
  - alsó sor: sikeres illesztés, de az egyenletnek nincs valós gyöke

Tartalom

1. A szürkeségi küszöbölés alapelvei
   - Hisztogram-alapú küszöbölés
2. Két küszöbválasztási módszer
   - Otsu módszere
   - Hisztogram-modellezés Gauss-eloszlásokkal
3. A küszöbölés példái és elemzése
   - Küszöbölési példák
   - A küszöbölés elemzése

A móduszok jobb szétválasztása gradienssel





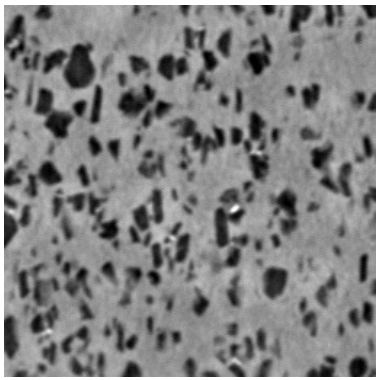
- Kombináljuk az intenzitás- és a gradiensinformációt a hisztogram javítására

$\Rightarrow$ Az objektumok és a háttér jobban szétválnak

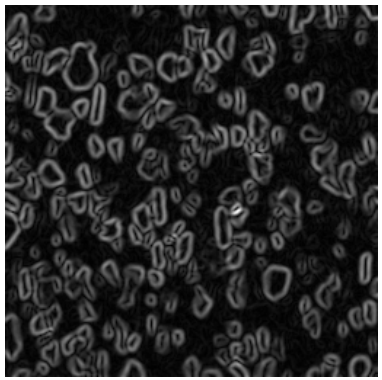
- az élekhez közeli pixelek gradiense nagy
- az objektum- és a háttérpixelek gradiense kicsi

$\Rightarrow$ a hisztogram számításakor **hagyjuk el a nagy gradiensű pixeleket**

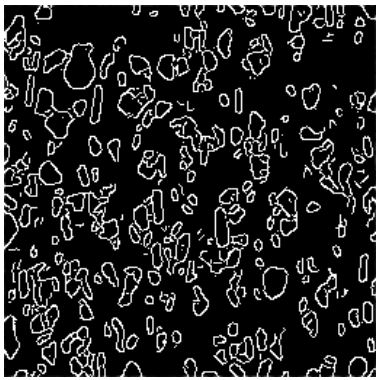
Valós példa a hisztogram javítására



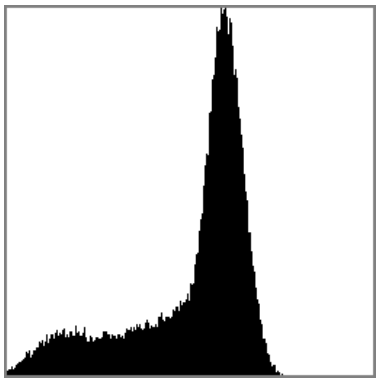
kép



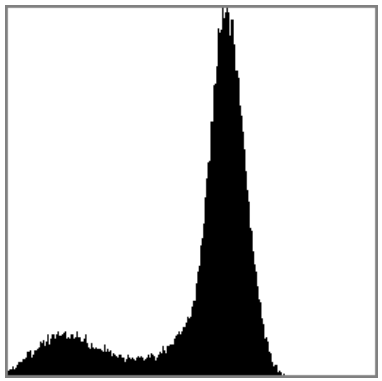
gradiens



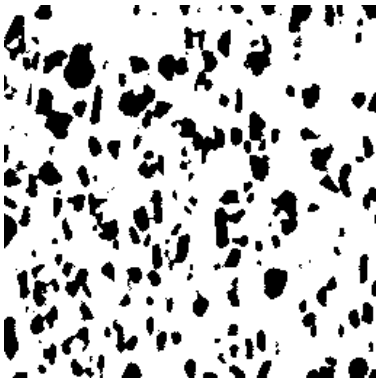
élek



eredeti hisztogram

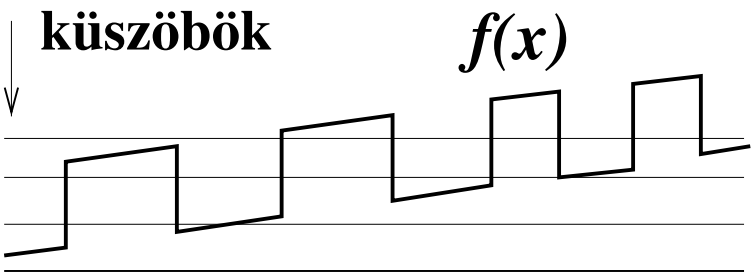


javított hisztogram

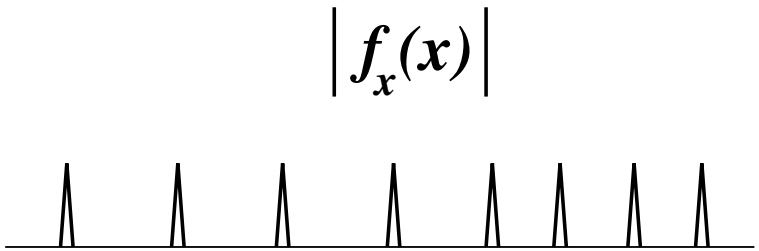


küszöbölés

Küszöbölés és éldetektálás



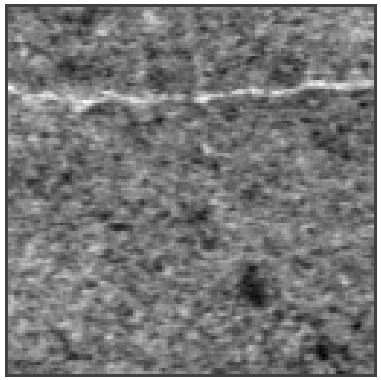
a trendet tartalmazó jel nem küszöbölhető



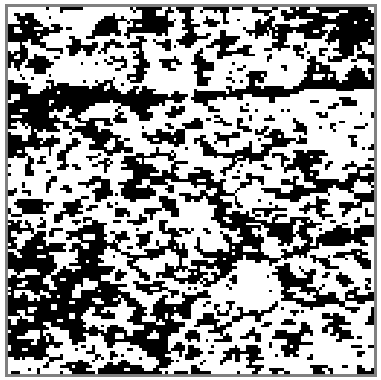
az élek viszont detektálhatók

- A **küszöbölés** konstans küszöbbel nem adaptív művelet
  - előny: zárt kontúrokat garantál
  - hátrány: egyenetlen megvilágításnál nem alkalmazható
- Az **éldetektálás** lokális művelet, amely alkalmazkodik a háttérintenzitás lassú változásához
  - előny: egyenetlen megvilágításnál is alkalmazható
  - hátrány: nem garantál zárt kontúrokat

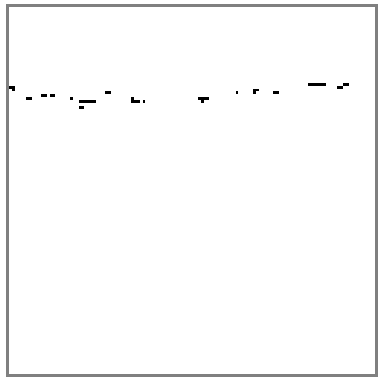
A küszöbölés korlátai 1/2



repedés a kőben



Otsu



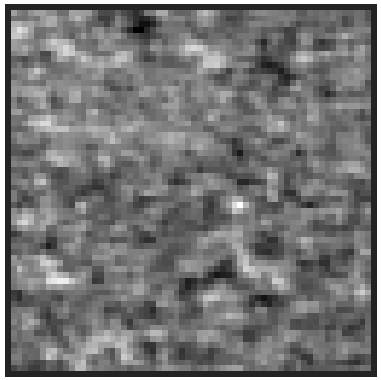
X módszer

- A küszöbölés jósága **feladatfüggő**
  - a jóság a minőség mértéke
- A jóság **geometriai tulajdonságokon** is múlhat
  - a hisztogram nem veszi figyelembe a geometriát

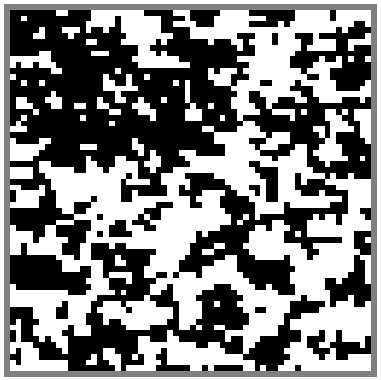
$\Rightarrow$ a repedést világos pixelekként detektáljuk

$\Rightarrow$ a detektálás független a repedés alakjától

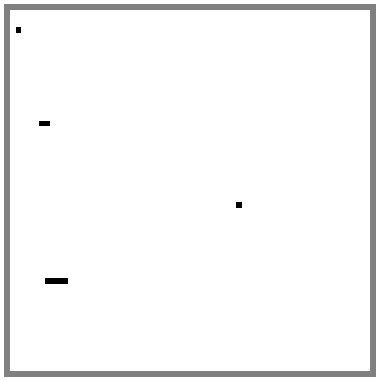
A küszöbölés korlátai 2/2



kő



Otsu



X módszer

- Itt az eredmény minősége **nem egyértelmű**
- A küszöbölés korlátai
  - nem veszi figyelembe a struktúrát
  - a pixelek tetszőleges felcserélése nem hat a küszöbre

  $\Rightarrow$ nem garantál összefüggő régiókat
- Megoldás
  - **régióorientált** módszerek: intenzitás és struktúra együtt